A very short introduction to Systems Science with examples
案例化的极简系统科学

吴金闪

系统科学首先是科学

上下左右贯通

从个体看到整体

从整体来看个体

List of changes

批注清单

目录

献给

致谢

序

前言

第一章　极简系统科学的极简版

你们不要相信“中国的整体论优于西方的还原论”这种东西，
...，各个民族的早期思想都是整体性的（而没有到达分解还原）[1]。
– 郝柏林

为了给最着急、最感兴趣、最没有耐心、最想看到全景的读者先展示一下全景，我准备了“极简系统科学的极简版”这一章。不过缺陷是，会有很多地方没看懂，或者似懂非懂。如果遇到了这样的情况，请不要着急，后面可能可以帮你理解得更好。当然，也有可能看完后面的更加不懂了——那就是另一个境界了，深入进入了开始自己思考了于是发现了更多的不懂。那个时候就需要开展一些自己的实践或者研究，才能理解得更到位了。

先祝贺大家即将展开这几个不同层次的旅程。相信我，掌握和不掌握系统思维和科学研究方法，你看到的世界，你的提出和解决问题的能力，乃至你的人生都将不同。

我认为，所谓掌握一个学科最重要的就是掌握一个学科的大图景，然后掌握之后能够做到跟这个学科的专家一样来开展思考和分析，来提出和解决可以算作是这个学科的关于这个世界的问题。因此，我们先来搞清楚什么是一个学科的大图景，然后再来阐述本书所体现的系统科学的学科大图景。

1.1　什么是和为什么需要掌握学科大图景

一个学科的学科大图景 [1, 2] 指的是这个学科的：

[1]引号和括号中的文字按照“郝柏林论系统科学和东西文化”视频（https://www.bilibili.com/video/BV1Uu411o7hz/）的内容做了顺序上的调整。

1. 典型研究对象，

2. 典型研究问题，

3. 典型思维方式，也就是这个学科的专家是如何来思考的，

4. 典型分析方法，也就是合格学科的专家是如何来通过具体的计算分析方法来体现其思考从而解决所提出或者所面对的问题的，

5. 学科典型责任，也就是这个学科为世界和其他学科做什么。

只要这几条搞清楚，就可以认为把这个学科学好了理解到位了掌握了，就可以用这个学科来提出和解决问题，创造和创造性使用知识，或者至少欣赏这个学科的知识的创造和创造性使用了。这个学科的研究案例、具体学科概念知识的学习，都可以看做是为了获得这个学科的学科大图景的素材和过程。

在这个学科专业的教学中，我们会花大量的时间来学习这个学科的研究案例和具体学科概念知识，从而帮助学习者体会到和掌握学科大图景。但是，在科普中，我们能够花在研究案例和学科概念知识上的时间会非常少。那么，我们就需要想办法来通过更少的这些基础和铺垫来实现掌握学科大图景这个目标。

我们在这里就先把这个学科大图景当做一个系统科学的案例。怎么说呢？你看，我们把学科大图景分解成五个方面。这是分解。那么，分解完之后，我们有没有得到比“学科大图景”这个名词甚至这个概念更多一点的信息呢？

我们说，从名词上，分解完之后更具体了，尽管如果想真的理解这五个分解出来的下一级概念，还需要继续分解，一直到读者你自己熟悉的名词、概念或者例子。例如，数学的典型研究对象是什么？你的中小学老师可能告诉你是数和形。尽管这个答案并不好，现代数学已经远远超越通常的数和形，而是研究关系或者说关系构成的模式，不过，至少你就有了典型研究对象的例子。如果你说数和形也还是不够具体，那你可以更具体地走到下一层也就是数和形的具体例子，例如整数和三角形。如果有必要还可以继续分解走到下一级，也就是 $0,1,2$ 和等边三角形（或者进一步具体化为，边长为 10 的等边三角形，乃至更更具体到边长为 10 以 1 厘米为单位的等

边三角形[2]）。经过这样的层层分解，我们至少对什么是一个学科的研究对象有了更清楚的认识了。如果一定要定义出来，可能还是不好办，但是，大概就是那些我们要把后面的“典型思维方式”和“典型分析方法”用到上面去的对象，也就是要针对其问“典型研究问题”的对象。你看，典型研究对象还和其他几个同层次的概念之间是有联系的。你看这就是初步的综合，通过分解，我们更好地理解了某一个级别的整体——在这里就是“学科典型研究对象”。

那为什么要帮助一个学科的学习者掌握典型研究对象呢？因为，一方面，有了现有的典型研究对象以及典型研究问题之后，我们就可以在下一次遇到这些对象的时候，把他们识别出来，从而运用这个学科现有的典型思维方式和典型分析方法来提出和解决关于这些对象的问题；第二方面，我们从这些现有典型研究对象和现有典型研究问题中掌握了其成为这个学科的典型研究对象和典型研究问题的某种内涵特征，我们就有一定可能性可以在遇到新的对象和问题的时候，把它们看做这个学科的典型研究对象和典型研究问题，然后运用这个学科的典型思维方式和典型分析方法，或者创造新的典型思维方式和典型分析方法，来提出和解决关于这些对象的问题。也就是说，创造性地使用知识和创造知识，都依赖于对典型研究对象及其内涵的掌握。

你看，经过这样的往下分解，或者说具体化的过程，再加上同一层级的联系——在这里就是把典型研究对象联系到典型研究问题和典型思维方式、典型分析方法，我们就达到了对典型研究对象的更好的理解。并且，我们还理解了为什么要掌握好典型研究对象：因为创造和创造性使用这个学科的知识的需要。这就是综合：先往下分解，再左右联系，然后网上合起来看到整体——这里就是学科大图景。

顺便，这里还有一个同级别的概念没有联系起来讨论过，而且一旦联系起来，可以更清楚地看到学科大图景这个整体。它就是“学科典型责任”。其实，当我们问，将来遇到新问题，连学科典型思维方式都可以突破，都可

[2]注意，从边长为 10 这个没有单位的数，到有了单位的具体长度的三角形，也是从上一级概念走到下一级具体对象上，也就是从抽象到具体的过程。如果需要，还可以从“所有的边长为 10 以 1 米为单位的等边三角形”走到“某一个你画在草稿纸上的边长为 10 以 1 厘米为单位的等边三角形。”

以被创造的时候，我们已经意识到了这里有一个边界的问题：那是不是从任何一个学科出发，遇到这样的新问题，创造出来新方法，这些问题和方法还算属于这个学科的呢？学科典型责任就发挥这个边界的作用。

为了帮助大家体会到学科典型责任的含义，其在学科发展中的作用，及其在学科大图景中的地位，我们把之前的分解的过程，从“科学家”（而不是历史学家）的历史的角度来看。例如，当我们遇到要知道一个近似长方形的土地的面积的时候，我们只要规定了基本单位（例如，1 米是多长），那就可以采用接龙这个基本单位的方法来测量这个土地的相关的长度，例如长和宽[3]，接着发现其实可以对长和宽划分格子，每一个格子会成为一个更小的边长为一个标准长度——这里是 1 米——的正方形，于是如果我们约定[4]这样的边长为一个单位长度的正方形为一个基本面积单位。这时候，所有的接近[5]长方形的土地的面积我们就都可以得到了：**我们先通过定义基本长度单位，然后做测量，最后约定基本面积单位，再来数小格子，而得到**。这个时候，很自然地，我们就进一步会问，那是不是换一个基本单位也一样，是不是计算方式上也可以比数格子更有效率，是不是其他形状土地的面积也可以通过类似的方式得到，是不是不仅仅是土地而是任何二维（甚至其他维度）几何体的面积（或者其他维度的“积”）都可以类似得到？

当然，我们已经知道了答案，只要发展起来和运用数学，任何一个基本单位下都可以（所以，数学本身不在于单位），计算方式上可以从数格子走到乘法或者说面积公式或者进一步积分，其他形状的几何体也可以通过切分成三角形或者更小的积分微元来得到各个维度的“积”。

现在，我们回过头来看这个发展历史，我们会发现：在一开始，我们关注的是具体单位下的具体地块的面积的计算，解决方式也是针对这个具体对象的，得到的答案也是带着单位，用着朴素的“数一数”的，针对这个具体对象的。这个时候，我们说，还是一个物理问题——也就是关于具体对

---

[3]你先允许我偷个懒，为什么这里只需要知道长和宽就够了，实际上，这要么来自于大量的实际探索实际应用的经验，要么来自于数学知识。但是，咱们先忽略这一点。

[4]你也先允许我这样约定。朴素地说，可以发现这样的正方形无论将来放到那一块地里面，都是同样大小的。严格地说，这需要数学证明，全等之类的——并不是四条边都是一个单位长度的平面图形都完全相同，甚至也不一定四条边加上四个角都完全相同就完全相同。

[5]这里还有一个问题，如何定义接近。不过，请允许我继续偷懒。

象的问题[6]。但是，当我们走到了最后，成了一个不依赖于具体单位而且计算方式上更具有一般性的境界的时候，我们实际上已经脱离了实际的对象，而仅仅保留着这些对象的某些更抽象的属性——这里其实就是内部和边界，然后在这个抽象属性的基础上我们就可以来回答一开始提出的得到各个维度的“积”的问题，最后反过来用于解决之前的实际对象的问题。这个时候，我们说，前后两个目标或者说典型责任就发生了变化：在物理问题中，我们想解决的是得到某个具体地块的面积；在数学问题中，我们想解决的是针对任意形状的任意维度的“积”我们是否有计算方法，然后把这个方法用来解决之前的物理问题。

这就是学科典型责任的不同，物理学最终要解决的是关于具体对象的问题[7]，而数学追求的是解决来自于现实但是又从现实中抽象之后成为更一般的问题的一般的方法以及把得到解决方法系统化严格逻辑化[8]。

这就是学科典型责任的区别导致的：一个学科的问题解决到某个层次，就可能会成为另一个学科的问题。当然，你要说，历史上，为什么会形成这样的学科典型责任以及相应的学科边界的区分。这个问题，应该仅仅是人类为了更好地发展每一个学科，让每一个学科的研究者可以一定程度上独立地开展工作，才人为划分出来的。例如，这样划分以后，作为一个数学家，可以一点都不会用具体的仪器来测量这个世界，但是只需要有很好的逻辑演绎能力和想象力，追求知识的系统化和严格化一般化，就可以成为一个很好的数学家。当然，如果这个数学家希望更上一层楼，成为一个提出问题的数学家，那可能稍微掌握一点物理，或者跟物理学家合作，也是很好的。因此，学科边界有其存在的理由，但是，每个领域的研究者，可以在看到边界的时候，选择去跨过这个边界。

---

[6]将来，物理也会保留着具体对象的某种特征——例如，永远保留具体单位——的前提下做一般化。这个也只能是允许我偷懒，不在进一步解释

[7]再次强调，物理学毫无疑问有自己的对于一般性的追求，知识抽象的角度不一样。例如，我们不仅仅要解释某个石头或者铁球的下落，还要解释所有的落体的下落，甚至那些看起来不落下来的天体的“下落”。但是，我们永远不脱离具体对象。同样，再次允许我偷懒不展开进一步解释。

[8]这个系统化严格化的过程本身实际上也会引发新的数学的发展，例如从欧氏几何到非欧几何的发展，从导数到极限的发展，从极限到实数公理化定义的发展。不过，再一次允许我偷懒，不进入这些细节。

于是，我们发现，其实在学科大图景的五条中，最重要的是学科典型责任，这一条指导了其他的四条。然后，我们也看到了对于将来提出和解决问题，创造和创造性地使用知识来说，学科大图景起到了非常重要的作用。

这就是综合：先把学科大图景分解到五个点上，对于每一个点继续分解（尽管我们仅仅展示了学科典型研究对象的分解），在每一个分解出来的层次之内考察分解出来的对象之间的联系（例如，学科典型责任和其他几条的联系），接着在从上到下的分解和同层之内的联系都考虑之后，合起来看到整体，也就是这个整体和之前展开的每个部分的关系，加上这个整体对于更大的整体或者说外界的意义——在这里就是学科大图景对于创造和创造性使用知识，提出和解决问题的意义。

或者，我们来更加抽象一下上面的描述：先把一个整体逐层分解，在每个层面内考虑层内联系，然后把这些层内联系和从上到下的层间联系合起来，看到从下到上的层间联系，看到这个整体在更大的整体中的位置或者说对外的意义。这就是综合，而且是分解之后的综合。我们把整个这个过程称为"上下左右贯通"，实际上往往是先从上到下，从左到右，然后从下到上。这就是系统思维。将来配合上什么是科学，合起来就是系统科学。

因此，系统科学就是系统思维和科学的结合。那科学是什么呢？将来会详细展开。大概来说，科学就是运用科学研究方法来提出和解决关于现实世界的问题的过程，以及这个过程得到的概念世界中的结果和在现实世界中的结果。注意，一般你在中小学甚至大学所学到的具体科学知识，往往更加关注这个过程得到的在概念世界的中的结果，也就是相应的学科知识。这其实根本就不是科学的核心，仅仅是科学研究过程的结果，而科学的核心是这个过程所运用的方法，也就是科学研究方法。科学研究方法大致包含：现实或者实验的启发、概念和数学建模（或者更详细，概念提炼、数学建模、模型求解）、实验检验，以及概念命题模型的系统化（争取把不同的概念命题和模型整合起来，建立在更少的假设、概念、命题、模型之上）。原则上，科学研究方法还可以包含学科大图景的提炼，也就是从具体研究工作中提炼出来这个学科的典型思维方式和分析方法等。例如，科学研究方法就可以算是科学这个学科的典型分析方法。这个典型分析方法用到了一些典型思维方式，例如批判性思维之实验检验，或者说把实验检验和数学演绎推理当做批判性思维的两只脚然后坚持所有的科学知识只有经过了批

判性思维才能成为科学知识的一部分。

顺便，如果有一天，人类要灭绝了，为了给可能后来的再出现的人类一点点可能得启发，如果我可以用某种后来人可以读懂的信息（比如说，某个具体的对象的某个具体问题的解决过程）留下来一个信息，那么这个信息，必然是体现科学研究方法的一个具体的提出和解决问题的案例。例如，留下来下面的发现 $F=ma$ 和 $F_G=m_g g$ 以及 $m_a=m_g$ 的研究过程。这个过程大概可以简述如下，

1. 首先，人们可以从重物下落的实验现象来发现，在忽略空气阻力和忽略物地距离的条件下重物下落轨迹和质量没关系，位移 x、速度 v 和加速度 a 都和质量 m_a 没关系。这个只要有测量时间和长度的方法和工具就可以发现。

2. 接着，人们从生活经验发现一个物体的质量和当把这个物体放在手掌上的时候手掌感觉到的这个物体对手掌的压力（也就是这个物体带来的重力）成正比，从而提出和验证猜想 $F_g=m_g g$。

3. 然后，把重力 $F_g=m_g g$ 和下落过程不依赖于质量（m_a）联系起来，发现，只要满足 $a=\frac{F}{m_a}$ 和 $m_a=m_g$ 就可以解释自由落体运动的位置速度和加速度和质量无关的观测事实[9]。

4. 反思为什么 $m_a=m_g$?

这个过程很好地展示了科学研究方法这个物理学的典型分析方法——科学研究方法，包含通过测量得到实验和现实的启发，概念建模和数学建模，实验检验，知识的系统化。

到现在为止，在非常粗糙的描述下，我们已经知道了什么是系统思维——分解和综合的结合或者说上下左右贯通，从下层个体看到上层整体（这个整体包含了这个上层整体跟其自己的下层的关系，以及这个整体在更大的整体中的作用和地位），以及从整体来看个体（这里就是看到学科典型责任对于学科大图景这个整体的意义），什么是科学——用科学研究方法，尽管没有展开讨论什么是科学研究方法，那我们就假设大家似乎可以看到系统科学是什么了——就是把系统思维和科学研究方法合起来，来提出合计

[9]具体计算如下，$a=\frac{F}{m_a}=\frac{F_g}{m_a}=\frac{m_g g}{m_a}=g$。

解决适合这两个东西合起来所解决的但是不合起来不容易解决的问题。后面我们就是用这样的案例来帮助大家更好地体会到系统科学。

我们这一小节的目的是交代什么是和为什么需要学科大图景这个概念。现在基本达成这个目的了，那我们来回到我们这一章的主题：系统科学的学科大图景是什么。

1.2 系统科学的学科大图景

在前一节中，我们用系统思维，也就是上下左右贯通的方式，分解和综合相结合的方式，从个体看到整体，从整体的角度来看个体的方式，来介绍了什么是和为什么需要学科大图景。这一节我们回到系统科学学本身，用学科大图景当做概念框架和阐述的目标，来介绍什么是系统科学。

也就是说我们要问：系统科学的学科典型责任是什么，她是给世界和其他学科提供什么的；系统科学的典型研究对象、典型研究方法、典型思维方式、典型分析方法是什么，而这些又是如何来达成这个学科的典型责任的。

- 系统科学学科典型责任
  - 系统科学是来解决运用系统科学的思维方式和分析方法——也就是这个学科最高层的系统思维和科学研究方法以及更低层的具体分析方法（后面会更详细地展开）——来解决不运用这些思维方式和分析方法难以解决的问题的
  - 同时，通过解决这样的问题来发展系统科学的思维方式和分析方法
  - 如果可能，也会把需要进一步一般化的分析方法转交给数学去研究发展
  - 往往在解决这样的问题的过程中，需要用到其他学科的知识甚至推动其发展（后两条体现了学科交叉性）
- 系统科学典型思维方式
  - 系统思维或者说系联性思考

    * 从孤立到有联系，从直接联系到间接联系，从个体到整体，从整体看到个体
    * 联系往往具有层次性，要上下左右贯通
  - 科学精神或者说科学思维
    * 批判性思维——只有经过理性检验的概念和命题才能成为科学知识的一部分，理性检验包含逻辑演绎和实验检验
    * 科学的最终目的是解决现实世界的问题
    * 任何直接和间接影响或者解决现实世界的问题，都需要采用科学研究方法来研究和解决，尤其是其中的实验检验

- 系统科学的典型分析方法
  - 科学研究方法：现实或者实验启发，概念和数学建模，实验检验，知识的系统化，以及它的下一级分析方法例如采用其他通用数学建模方法来对系统做分析，比如说用微分方程、矢量矩阵等数学结构对系统建模和分析
  - 网络——包含概念地图——当做系统描述的骨架以及用网络分析来研究系统：把系统看做是由元素（顶点）通过联系（连边，连词）构成的网络，然后采用广义投入产出分析、网络顶点重要度测量、网络社团结构分析等网络分析方法来实现系统性思维中的从个体看到整体，从整体的角度来看个体
  - 相变和涌现性分析：在整体的层面定义一些反应系统整体层面的量，例如相关性、序参量、信息论有序程度度量等，然后看系统在不同参数和/或者时间点的整体状态，及其转变，注意在这里关键不在于相变分析方法，而在于通过看整体行为发现整体行为的转变，以及它们和个体的关系
  - 静态和动态优化方法：运用运筹学或者控制论的优化方法按照某个选择的关于整体系统表现的目标做优化，甚至进一步来调整系统结构，注意在这里关键不在于方法，而在于通过优化来沟通整体和个体

- 典型研究对象：适合运用系统科学典型思维方式和典型分析方法来研究的对象，也就是存在着下面所说的系统科学的典型研究问题的对象
- 典型研究问题：适合运用系统科学典型思维方式和典型分析方法来研究的问题，大概来说就是这个对象存在着一些通过考虑联系，考虑分解和综合，整体和个体之间的联系就可以很好地解决，不这样考虑就不好解决的问题

这个列表在典型分析方法上不是完备的，所列出来的各项也不完全在一个层次上。例如，科学研究方法实际上比网络当做骨架和网络分析，相变和涌现性分析、优化方法要更高一个层次。毕竟，科学比系统科学也更高一级，系统科学属于科学。但是，由于我们这里主要为了阐述什么是系统科学，而且网络骨架和网络分析非常体现系统思维，优化方法在系统分析中非常常用，我们单独给它们提升一级，和科学研究方法放到一起。

同时，我们注意到一个非同寻常的地方：系统科学的典型研究问题和典型研究对象的定义是基于系统科学的典型思维方式和典型分析方法的，或者说是基于系统科学的学科典型责任的。一般来说，一个学科应该是现有独立的具有一定共识的典型研究对象，然后提出研究问题，然后通过回答这些问题发展出来分析方法和思维方式，最后总结提炼为这个学科的典型责任。例如，物理学化学生物学医学等自然科学就是如此，经济学社会学等社会科学也大概如此，心理脑和认知科学也大概如此，教育学也本来应该如此（尽管实际上并不是如此）。

我们以物理学为例，来看看其学科大图景，尤其是其典型研究对象和典型研究问题。物理学一开始主要研究看得到的没有生命的（可能因为当时就知道没有生命的比有生命简单，影响因素更少）物体的运动，例如地面上的桌子，下落的石头，天体。后来只要能够观测到的物体的运动，例如分子、原子、太阳系之外的宇宙。然后，研究这些典型对象的什么呢？它们的运动。从机械运动，后来走到热运动，电磁作用力的运动，微观粒子的运动，以至于为了研究运动走到研究作用力和作用力下的运动规律，也就是作用力和运动方程。除了观测和实验来获得数据，还需要建立和求解方程，以至于需要进一步用新的实验来检验做求解出来的答案（于是，也间接检验了所建立的方程和建立方程的背后的思维方式和概念）。只要有一次通不

过检验，并且这个不通过可以复现而不是纯粹偶然由于测量误差或者误操作之类的，那我们就否定这个答案，顺便也考虑去否定方程及其背后的概念和思维方式、计算分析方法。这就是物理学大概来说的典型研究对象和典型研究问题。在这个过程中我们形成了批判性思维（必须通过实验检验和逻辑演绎的检验）这个科学精神的核心，也形成了分解和综合这个物理学的重要思维方式，形成了科学研究方法这个重要的物理学的重要分析方法，以及这个分析方法之下的更具体层面的分析方法，例如对实验数据的统计分析和误差分析，用加速器和对撞机来轰击物体从而获得更加微观的粒子的行为再用云室来记录轨迹等等。最终，物理学需要建立这个世界之中的无生命物体是如何运行的概念和数学模型，从而有一天实现，只要给定事件发生的条件，原则上物理学就应该给出来发生的结果，这个结果在误差范围内和实际测量到发生的事情应该相符[10]，而且这个误差要得到解释并且越小越好。最后这个就是物理学的学科典型责任。

好了我们交代了物理学的学科大图景，就发现，这个系统科学这个太异常了：竟然典型研究对象和典型研究问题是从典型思维方式、典型分析方法和学科典型责任来定义的，而不是先有独立的关于典型研究对象和典型研究问题的约定。

但是，回到现代的物理学我们就可以稍微理解一点为什么会出现这样的奇怪的情况了。由于从物理学发展出来的典型思维方式和典型分析方法，尤其是，分解和综合、批判性思维、科学研究方法、相应的计算方式和测量仪器，都太成功了，例如目前的试验和理论的比较表明关于电子磁矩的理论值 $g = 2$ 在小数点十位以内都是准确的，于是人们开始扩大物理学的范围。一方面，基于化学实验的化学和基于物理学理论的化学目前已经融合为化学学科。在物理学和化学基础之上，基于对生物本身的观测和研究问题的提出和解决，发展出来了生物学。医学也类似。甚至，经济学在发展过程中也一直借鉴物理学的研究方法和概念。因此，顺便，尽管经济学的实验检验比物理学难很多很多（因为经济现象和经济现象的主体——人的决

[10]当然，从逻辑上说，就算实验结果和模型的计算结果相符，也不能证明这个模型以及背后的概念和思维方式分析方法是对的，只能说它们不是错的。通过实验来严密地证明一个模型正确是不可能的。关于科学中实验检验的纯逻辑讨论，见Karl Popper（卡尔 · 波普尔）在《科学研究的发现》[3] 中对可证伪性的讨论。

策——远比下落的石头更加复杂)，但是，最近的经济学发展已经越来越强调实验检验了。甚至实验经济学已经成为经济学的主流之一。这基于物理学来建立独立的拥有自己的典型研究对象和典型研究问题的学科仅仅是发展的一方面。另一方面，当前的物理学，同样由于其太成功了，还具有很强的学术攻击性（aggressive，大概就是发现一个问题，如果还没有人在研究，那么物理学家就会去研究)。例如经济物理学、生物物理学、社会物理学等新兴学科的发展就是如此。那么，这样的交叉学科中，物理学家主要贡献什么呢，为什么它们可以这样做呢？

物理学家主要依靠的就是物理学的典型思维方式和典型分析方法，尤其是，再次强调，分解和综合、批判性思维、科学研究方法以及相应的更加具体层面的计算分析方式。他们为什么可以这样做呢？因为科学研究发现，下落的石头和能够做决策的动物和人之间的区别，看起来是能动性适应性，但是，在很多问题中，能动性适应性强的个体的行为，仍然很大程度上可以用物理学的典型思维方式和典型分析方法来研究，不过具体的物理学的概念和方程就不一定可以迁移过来了。换一个角度来说，能动性适应性，可能很大程度上，是使得其决策和行为刚好符合某一个更大的模型更高的角度的优化。在这个意义上，搞清楚了相应的优化问题的条件，自然就可以更好地理解这些具有强能动性适应性的传统非物理学的典型研究对象的行为。

因此，你看，其实，现代物理学，除了在传统的物理学领域——这个世界的非生命体的运动之中继续前进之外，已经开始渗透到心理脑认知领域、生物领域、社会领域。于是，如果这个时候，我们来问一个脑子开放的物理学家，“当前物理学的典型研究对象和典型研究问题是什么”，他/她就有可能可以这样回答，“适合运用物理学的典型思维方式和典型分析方法来研究的对象和问题”。在这个意义上，物理学和系统科学的典型研究对象和典型研究问题的定义方式相同。

顺便，我们也看到了，其实系统科学很大程度上发展自物理学。我自己通常同系统科学的另一个定义：把发展自物理学的典型思维方式和典型分析方法用到非典型物理对象上开展研究的过程和这个过程得到的学科概念知识上的结果，以及学科大图景上的结果，以及对于所研究的对象产生的实际的结果。最后这个“对于所研究的对象产生的实际的结果”原则上，属于系统科学的工程。注意，我这里特意避开了“系统工程”这个词。通常

人用的系统工程特有所指，并且和这里所说的系统科学关系不大，往往指的是：运筹学、控制论、软件工程等主要用来优化一个过程的工具。当然，原则上，你说，如果你想优化一个系统是否先要对这个系统的构成要素以及要素之间的相互作用开展研究，看到这个系统的整体和这些个体之间的关系，我完全同意。但是，历史上的发展导致系统工程有了自己的内涵。因此，我特意保留系统科学的工程，来指代把系统科学用于解决实际问题的过程，以及这个过程所产生的方法和工具，以及这个过程得到的结果。

为什么系统工程会和系统科学分开发展？这个问题我没法回答，只能瞎猜。我怀疑，是很长一段时间，系统科学太差了，以至于在解决问题上系统工程管用的程度大大超过了系统科学。于是系统工程不屑于和系统科学一起发展，不屑于从系统科学获取思维方式分析方法甚至学科概念上的任何营养。我不得不说，很大程度上，这个不屑于是有理由的。系统科学很长时间内，甚至到今天，仍然主要是系统哲学而不是系统科学。

当然，我也希望有一天系统科学的工程和系统工程重新统一起来，那也就是系统科学从系统哲学变成真正的系统科学的那一天。不过在这里，我们先暂停对系统科学和系统哲学的联系和区别的讨论。我们先回到这一节的主题——系统科学的学科大图景。

我们来对每一项做一个进一步的解释。

1.2.1 系统科学的学科典型责任、典型研究对象和典型研究问题

在系统科学的学科典型责任包含解决适合和需要系统科学的典型思维方式和典型分析方法来解决的不用就解决不好的问题，通过解决这样的问题发展系统科学的典型思维方式和典型分析方法，以及顺便推动数学或者研究问题所在的具体学科的发展。首先，我们看到这个学科典型责任是通过典型思维方式和典型分析方法来定义的。当然，我们已经提到，今天的物理学也已经采用了类似的方式来定义学科典型责任、典型研究对象和典型研究问题了。因此，这也不是不可接受，只要典型思维方式和典型分析方法是明确的就行。但是，问题是，在物理学，典型思维方式和典型分析方法确实比较明确和成熟固定，可是在系统科学呢，典型思维方式和典型分析方法也是比较明确和成熟固定的吗？这就牵涉到学科典型责任的第二条

——通过提出和解决典型研究问题启发典型思维方式和典型分析方法。因此，其次，我们看到典型思维方式和典型分析方法在系统科学是在发展变化之中的。逻辑上，这就有了问题：我们完全可以把任何一个问题的解决都当作系统科学在发挥作用，如果用的方法还不是系统科学的典型思维方式和典型分析方法，那我们就把解决这个问题所用的方法增加到现有的系统科学典型思维方式和典型分析方法里面，于是，一切研究就符合了前面的学科典型责任、典型研究对象和典型研究问题的定义。

你不要觉得我这个逻辑不可思议，实际上，在一个学科的发展初期，以及在一个学科的不要脸没底线的人那里，你经常会听到，某某学科就是某某学科的人干的那些事情，例如系统科学就是北京师范大学系统科学学院的人做的研究，或者就是那群被称为系统科学的研究者做的研究。当然，在一个学科的发展初期，这是具有一定的合理性的，毕竟那时候这个学科的大图景的各个方面都正在形成之中。

那回到系统科学，一定程度上，这个学科也确实还在发展之中，那可以用这样的无底线的逻辑吗？我们应该尽可能地避开。实际上，系统科学的典型思维方式和典型分析方法尽管还在发展之中，但是，总还是有一些内涵是已经形成的，而且在很长时间的未来也不太会变化的，也是层次比较高的。比如说，前面列出来的典型思维方式和典型分析方法之中的系联性思考（从孤立到有联系，从直接联系到间接联系，从个体到整体，从整体看到个体，上下左右贯通）、科学精神和科学思维、科学研究方法（现实或者实验启发，概念和数学建模，实验检验，知识的系统化），网络当作描述系统的骨架。因此，如果说一个研究这里列出来的都没有用到，那大概不能算系统科学的研究。如果说没有用到科学研究方法，但是用到了系联性思考等其他的，那只能说是一个系统哲学的研究，而不能说是一个系统科学的研究。如果说，除了用网络来描述系统内部的元素和相互作用，但是其他的都用到了，那大概还是可以算是系统科学的研究工作。也就是，大概来说，前面列出的典型思维方式约束力比较大，典型分析方法约束力比较小，而且越具体的约束力越小。

既然系统科学的学科典型责任是通过其典型思维方式和分析方法来定义的，那么其典型研究对象和典型研究问题那就更加是通过其典型思维方式和分析方法来定义的了：那些适合系统科学的典型思维方式和典型分析

方法来研究的对象和来解决的问题，自然就是其典型研究对象和典型研究问题。

解释了系统科学的学科典型责任之后，我们再来解释系统科学的典型思维方式的内涵。其实，上两段中我们已经用了这个典型思维方式，不过在那里我们假设你已经一定程度上理解了它。现在，我们来作进一步的解释，帮助你初步理解系统科学的典型思维方式。将来还会有更多的研究和应用的案例来帮助你更好地理解它。

1.2.2 系统科学的典型思维方式和典型分析方法

系统科学的典型思维方式之一是系统思维或者系联性思考，其含义是在提出和解决问题的时候，要做到从孤立到有联系，从直接联系到间接联系，从个体到整体，从整体看到个体，（由于联系往往带有层次性所以要）上下左右贯通。一个系统最大的特征就是包含了相互联系起来的多个元素。如果不包含下一级的元素，那么，其行为和属性就是直接给出或者观测到的行为和属性，也就不需要进一步研究了。如果我们想理解这个对象系统为什么具有这个属性为什么有这样的行为，往往我们就要走到这个系统的内部，以及这个系统的环境也就是这个系统的外部来研究。例如，我们看到一辆车的运动，希望进一步理解其怎么动，就需要走到这辆车的发动机、方向盘和传动机制等关键部件来研究。例如，我们看到一个天体怎么运动，希望进一步理解其为什么这样运动，就需要走到这个天体的内部（例如质量分布是不是有偏）以及和这个天体相互作用的其他天体等这个天体的外部来研究。因此，当我们把一个系统当作研究对象的时候，走进这个系统的内部看到其内部的元素，或者把这个系统看作是更大的系统的元素，是很正常的很必要的操作。

如果我们忽略这个系统内部元素之间的联系，把这些元素都看作是独立的元素，则中心极限定理保证了我们的研究是平庸的。比如说，我们来考虑卖出一盒子的鸡蛋的总的收入，我们可能写作

$$E=\sum_{i=1}^{N}p_i. \tag{1.1}$$

其中 p_i 是每一个鸡蛋卖出的价格，N 是鸡蛋的总数量。最简单的，我们可以取 $p_i=p$ 为一个常数。每个鸡蛋卖出的价格都相同。于是，$E=Np$。如

果每个鸡蛋的价格是一个一定范围内波动的随机数，则按照中心极限定理，总收入 E 就是一个服从正态分布的随机数。其均值和方差都和单个鸡蛋的波动范围的关系是可以明确地写出来的。也就是说，这个系统的问题，不需要更进一步的研究，基于概率论的统计学就够用了。

什么情况会使得我们的问题更加有意思，需要进一步研究，甚至运用系统思维来研究呢？这些鸡蛋之间有联系，导致这些鸡蛋的价格之间也有联系。第一种联系可能是卖鸡蛋的商家制定的价格上的联系。例如第一个的价钱可能稍微贵一点，但是若干个以后可能更便宜。第二种联系可能是卖鸡蛋的商家根据市场影响市场规律或者购买者的习惯或者某个因素对价格机制优化以后的鸡蛋价格上的联系。例如，买了若干个鸡蛋以后，肯能再购买鸡蛋的意愿就降低了，除非降低价钱；或者这个商家故意做饥饿营销，限制购买数量，或者若干个以后价格上涨。如果更进一步，鸡蛋的价格不仅仅和买的数量或者说顺序有关，还跟具体买的哪一个有关，那甚至有可能会出现更加复杂的情况，例如某种组合下对于商家来说最有利，某种组合下对于买鸡蛋的人来说最有利，某种组合下对于双方都更有利（也就是说，在这个组合下，不存在单方调整价格机制或者购买数量使得主动调整的一方获利更多[11]）于是，买卖双方的行为往往就会收敛到最后这个双方都更有利的组合上来。于是，我们说，理论模型解释了现实世界的行为，这个鸡蛋买卖的系统涌现出了一个具有一定稳定性的整体行为。

类似地，我们如果在学习汉字、英文单词、数学概念、数学命题的时候一个个单独来学习，我们基本上就得靠死记硬背和重复练习了：每个字每个词多写几遍，每个概念的定义或者定理的内容多背几遍，或者在做题或者实际应用中多重复几遍。但是，如果我们发现汉字之间的联系，英文单词之间的联系，数学概念命题之间的联系，那就有可能有更好的超越死记硬背和重复练习学习方法了。例如，我们发现，“木”本身来自于树的形状是象形字，“林”是由两个“木”构成的，意思是许多的树；“森”是由三个“木”构成的，意思是一大片的树；“本”在“木”这个字的基础上在底部增加了一横，表示树的根部，意思是根；“沐”的左边是三点水，表示这个字的含义（洗头）和“水”有关，右边是“木”代表这个字的读音和“木”有关；“体”由“人”和“本”构成，其含义是（做为生物性的）人的根本，也就

[11]顺便，这被称为Nash 均衡。

是人的身子，人的健康；"classmate" 来自于 "class"（班级）和 "mate"（伙伴）两个单词的组合，意思是班级里面的伙伴，也就是同学；"classroom" 来自于 "class"（班级）和 "room"（房间）两个单词的组合，意思是班级用的房间，也就是教室；"加法" 是 "合起来数一数"，而 "乘法" 是 "重复的加法"，于是 4×3 就是 4 个 3 的重复加法，也就是要做三次（第一个 3 本来就有了，剩下的三个 3 需要累加上去）合起来数一数，就得到了 12，并且未来就可以得到长方形的面积的公式——不过就是每一行若干个小正方形的面积，然后需要重复行的数量（也就是宽分成单位长度小格子的数量）这么多次加法，于是就是乘法，得到等于长乘以宽。

这就是从孤立到有联系。对于系统科学的典型研究问题来说，看到这个联系往往是第一步。那什么是从直接联系到间接联系，从个体到整体，从整体看到个体，上下左右贯通呢？看到联系以后，我们就要想办法描述这个联系，运用这个联系来更好地提出和解决问题。比如说，回到汉字、英文单词和数学概念命题的学习的场景，我们可以问：运用汉字（英文单词、数学概念命题）的联系是否可以帮我们更好地学习汉字（英文单词、数学概念命题）。首先，我们发现，在学习每一个汉字的时候，用上这个汉字的结构——可以从字形上拆分为哪些部件，往往有助于更好地理解这个汉字的含义掌握这个汉字的读音。这一点从 "林、森、本、沐" 都可以看出来。其实这个联系有的时候也可以反过来用，例如从 "姐妹、妈妈、奶奶、姨妈、姑妈" 等发现，"女" 肯定表示这些含义的共性，也就是雌性性别的意思。其次，我们还可以看到间接联系。例如，"木—本—体" 就是一个间接联系。这就是从直接联系到间接联系。一旦我们看到间接联系，很自然，我们就会问，那是否可以利用这个间接联系来更好地提出和解决问题呢？

这个时候，我们就会发现，没准这里有一个学习顺序学习道路的问题。就好像我们有了包含了地点和道路的地图之后，我们可以问 "对于给定的起点和终点，或者为了走遍大量给定要经过的点[12]，走哪条路时间或者路程更短" 的问题，在这里，我们可以问 "有了汉字以及汉字之间的联系，对于给定的起点汉字和终点汉字，或者大量的给定的要学习到的汉字，用什么样的学习顺序成本更低效率更高" 的问题。英文单词和数学概念也类似。如果我们解决了这个问题，只要给定一个学科的知识构成的网络，我们就可

[12]这被称为 "邮递员问题"。

以来设计这个学科的好的教和学的顺序。这就从个体知识点的好的学习方式走到了整个学科知识网络的好的学习方式。这就是从个体看到整体。

一旦我们这样去看到整体了，我们往往会发现，对于某个整体目标来说，并不是所有的元素都是同等地位的，有一些元素会比其他的元素更加重要。例如，在汉字中，自然地构成其他汉字多的汉字，处于汉字网络底层的汉字，以及使用频率高的汉字，对于好的学习顺序来说是更重要的。这就是从整体的角度来看个体。

系统内元素的层次性以及元素之间的上下左右贯通稍微复杂一点。前面我们已经看到了汉字之间的联系。这可以看作同层元素之间的联系。运用这个联系来提出和解决问题就是同层次之内的左右贯通。英文单词之间的联系也类似。其实，数学概念和命题之间的联系稍有不同：原则上，我们可以把命题看作是概念通过联系构成的，也就是概念是命题的下层，进一步命题之间也有演绎推理关系，概念之间也有除了构成命题之外的其他关系。因此，在这里原则上包含了概念层之内的左右关系，命题层之内的左右关系，以及概念和命题层之间的上下关系。在这样的网络中行走，就是上下左右贯通。不过，我们也可以忽略这个概念-命题之间的上下关系，合起来看作是数学学科概念和命题网络之内的左右关系。然后，我们把数学学科大图景和数学概念和命题看作两个不同的层次，或者类似地，把物理学科大图景和物理学科概念和命题分成两个不同的层次。一旦我们通过具体学科知识的被创造的过程来体会到学科大图景，或者用学科大图景之中的典型思维方式和典型分析方法来提出和解决问题从而“创造”出来某个具体的学科知识，那我们就在走上下贯通。于是，结合各自层次之内的左右贯通，合起来就是上下左右贯通。

其实，我们通过对汉字网络用于汉字学习的问题的回答，假设找到了学习顺序的一般算法，就可以迁移到英文单词网络、数学概念和命题网络上。而这恰好是一个上下左右贯通的例子：基于汉字网络之内的左右贯通我们找到了学习顺序的一般算法，而这个一般算法迁移到完全不同的知识网络上就可以解决那个知识网络的学习问题，因此这个学习顺序算法属于比特定的知识网络更加高层的知识。于是，你看，我们从具体知识网络往上走到了更高层的学习顺序算法，再从学习顺序算法走到了更低层的另一个具体知识网络。这个学习顺序算法本身运用了每一个具体知识网络之内的联系。

在这个系联性思维的指导下，有相应的系统科学的典型分析方法，例如“网络——包含概念地图——当做系统描述的骨架和分析方法”。不过，这部分的理解需要很多的细节概念和案例，因此我们会在具体方法的章节再进一步展开。

系统科学的典型思维方式的另一个是科学精神或者说科学思维，以及相应的科学精神指导下的典型分析方法——科学研究方法。关于科学精神和科学研究方法我们有专门的章节详细展开。同时，由于我们假设本书的读者具有一定的对科学精神和科学研究方法的认知，或者说至少前面列表里面的那几句话大概模模糊糊地看得懂，我们就心安理得地把这部分留到专门章节去解释了。

这不是说对于系统科学来说，系统更重要，科学不那么重要。如果系统科学非得在系统和学科之间选择一样来保持，扔掉另一样，那我选择保留科学扔掉系统。为了把这一点更加强调，我们写了下一个小节。如果你看完本书，什么都忘了，那就请你记住“系统科学不是系统哲学，差异在科学两个字”。下一章，我们将会讨论什么是科学：科学的核心是科学研究方法和科学精神——任何和现实世界有关的问题都需要运用科学研究方法（尤其是其中的实验检验）去开展研究。

1.2.3 通过层层嵌套的 WHWM 运用系统思维

那么我们如何运用系统思维，如何做到从孤立到有联系，从直接联系到间接联系，从个体到整体，从整体看到个体，上下左右贯通呢？在这里我们介绍一个通过层层嵌套的提问四个问题的方式来帮助大家运用系统思维。这四个问题是：是什么（What），怎么样怎么做（How），为什么是这个为什么这样做（Why），以及针对这个对象这样做的意义尤其是更高层次的意义（Meaningful）；或者相关地，这个系统里面有哪些对象（What），这些对象是如何相互联系相互作用的（How），如何（How）描述和分析这些对象和联系，为什么（Why）需要考虑这些对象和这些联系，为什么（Why）需要和可以通过这样方式来描述和分析这些对象和这些联系，考虑了这些对象和联系之后对于看到它们构成的整体的功能有什么意义（Meaningful）。

举个例子。我们面对一个自行车，问自行车有哪些组成部分，每个部分之间具有什么样的结构和功能上的联系，对于这个自行车的整体功能来

说这些组成部分和联系有什么意义，为什么非得有还是说可以简化或者优化这些组成部分和联系。更进一步对于自行车，我们很容易就走到更大的整体，把自行车和人已经典型路况结合起来组成一个更大的系统。这个时候我们可以再一次来问上面的问题。如果我们想理解自行车龙头对于自行车的意义，我们会发现，自然地，我们需要走到这个更大的系统。反过来，对于自行车链条的作用，大概我们只需要在自行车的内部来看就行。因此，问这四个问题可以帮助我们运用系统思维，而且其中的为什么和有什么意义的问题常常自然地把我们引导更大的系统的层面。

再举个例子。假设我们是一门学科的老师。我们需要设计这一门课教什么怎么教，或者一节课教什么怎么教。我们可以这样来提出和回答问题：第一、这一节课教什么；第二、这一节课怎么教；第三、为什么这一节课教这个，为什么这一节课这样教；第四、这一节课这样教对于整个课程有什么意义，对于学生有什么意义，对于我自己有什么意义。然后，从第三和第四个问题，我们自然地过渡到了一门课的层次类似的问题：第一、这一门课教什么；第二、这一门课怎么教；第三、为什么这一门课教这个，为什么这一门课这样教；第四、这一门课这样教对于整个专业有什么意义，对于学生有什么意义，对于我自己有什么意义。甚至，更进一步，我们从这里的第三第四个问题，我们可以自然地过渡到学科专业层面、学生个体层面的类似的问题：第一、这一学科专业教什么；第二、这一学科专业怎么教；第三、为什么这一学科专业教这个，为什么这一学科专业这样教；第四、这一学科专业这样教对于整个学科的发展和社会发展有什么意义，对于学生的整体发展有什么意义，对于我自己有什么意义。在这里我们也看到往往为什么和有什么意义的答案在本层对象对更高层对象的作用之中。这其实本身也是从整体来看个体。

从追问方法的方法（的方法...）的角度，我们可以再一次提升这四个问题的层次。之前我们都从学科的角度来问的问题，也就说，我们直接解决的是教什么和怎么教的问题。我们实际上还可以从教学理论的角度来这样问：第一、我们要回答的问题是教什么和怎么教，我们把这些问题的答案当作第一层 What 的层次。第二、我们如何来决定教什么，我们如何来决定怎么教，也就是我们是如何（How）来得到第一层的 What 的；第三、我们追问为什么（Why）可以用这个方法来得到这个 What；第四、我们得到了这

个 What 有什么意义，有了这个方法来得到这个 What 又有什么意义。

回到上课的例子，这里，我们就从具体的一节课一门课一个学科教什么和怎么教的问题，到了确定一节课一门课一个学科教什么和怎么教的方法的问题。应该说，一节课一门课一个学科教什么和怎么教的问题主要还在具体学科里面得稍微考虑学生的当前基础，但是，确定一节课一门课一个学科教什么和怎么教的方法的问题已经进入了教和学的理论了。一旦把这个问题回答好，很有可能可以把这个确定这一节课一门课一个学科教什么和怎么教的方法迁移改造之后用来回答确定另一节课一门课一个学科教什么和怎么教的方法的问题。这样我们就从具体学科进入到了建立在具体学科基础上但是已经超越了具体学科而是可以适用多个学科的教和学的理论了。

原则上，我们还可以继续追问，有没有确定一节课一门课一个学科教什么和怎么教的方法的方法，我们是如何来创造选择和确定一节课一门课一个学科教什么和怎么教的方法的。如果这个问题可以回答清楚，实际上，我们就到了可以不仅仅适用于找到解决某个具体问题的方法的层面，有可能可以到了有了适用于一般性的方法创造选择和确定的方法的层面。这个时候，大概就到了一般性人类思维的层面。

其实，类似地，对于我们自己的工作任务，我们也可以先分解到这个任务的内部，要完成什么子任务，这些子任务又如何完成，为什么要完成这些子任务为什么要这样来完成，完成这个子任务对于整体任务来说有什么意义对于我来说有什么意义；然后，跳出来，追问我完成这个整体任务对于我自己完成其他任务，对于我的同组内的同事等成员，对于我们整个组，有什么意义，应该如何相互协调来完成的更好；接着，再一次跳出来，追问，我自己和我们组完成的这件事情对整个公司整个单位有什么意义，有哪些相关的任务，如何协调起来完成的更好；最后，甚至进一步追问，我自己、我们组、我们公司我们单位完成的这件事情对于整个行业、领域、国家甚至整个人类来说具有什么意义，有哪些相关任务，如何协调起来完成的更好。

总结一下，通过层层递进地追问 WHWM，尤其是其中的为什么和有什么意义的问题，往往可以使得我们自然地走达到上下层对象之间的贯通；通过不断地追问 How，也就是怎么做、如何得到这个怎么做、如何得到如何得到这个怎么做的方法以及不断地继续下去，就走到了更高层次的知识

上面；通过不断地从更高级别的单位的角度来问 WHWM，也可以促进走向更高层次的贯通。后面我们会有具体的例子来展示这些问题的追问为什么可以促进系统思维。

后面我们也将介绍更复杂的更专门的运用系统思维的方式。

1.3 系统科学和系统哲学的区别

系统科学指的是运用系统科学的典型思维方式和分析方法来提出和解决问题。在最高层的思维方式和分析方法上，除了系统思维、批判性思维还有科学精神和科学研究方法。系统哲学指的是主要是用系统思维，尤其是片面放大的那些，例如"联系是普遍存在的"、"整体大于部分之和"、"涌现性"、"传统科学只有还原论，也就是只有分解没有综合，而且还原论也就是分解是落后的"，来企图指导如何认识世界，企图指导如何提出和解决问题。

这世上有太多的系统哲学家，又只有太少的系统科学家。那么，系统哲学和系统科学区别在哪里呢？其实最重要的只有一条，就是哲学和科学的区别：科学需要讲道理（演绎证明计算）和做实验检验，哲学只关注可以讲道理但是暂时不能做检验或者不屑于做检验的事情。系统科学首先是科学，所以，追求的是计算出来的结果和实验检验相符；而系统哲学则只需要从逻辑上，甚至从感觉上，看起来对这个事物的认知和认知方式有道理。

具体来说，系统哲学主要就是提倡系统思维，并且企图用系统思维来指导人们的思考，指导人们提出和解决问题，但是又不关心这个问题能否解决，解决得怎么样。于是，系统哲学家最经常说的几句话，就是"联系是普遍存在的"、"整体大于部分之和"、"涌现性"、"传统科学只有还原论，也就是只有分解没有综合，而且还原论也就是分解是落后的"。

我们来逐句分析。首先，"联系是普遍存在的"。这句话大概不能算错。除了特别特殊的孤立系统，例如外太空中不受引力作用（其实往往做不到，暂时，应该可以找到近似周围的天体对这个物体的合作用力为零的点）不受空气阻力等任何其他物体的作用力的一个点和这个点上的一个物体，大部分的系统都受到其他系统的相互作用，物理的或者非物理的。对于哲学来说，这句话就够用了，好像也说了点什么。但是，对于科学来说，这句话

是远远不够的：除非对于具体研究对象，我们能够找出来跟这个研究对象具有相互联系的其他的对象，以及搞清楚这个联系，或者这句话能够帮助我们搞清楚这些相互联系的对象以及联系，这句话对于科学研究者没有任何意义。如果能够得到这些联系，或者帮助得到这些联系，那下一步的问题，在科学中，就是用什么样的分析方法来对这些联系做分析从而提出和解决问题。大致来说，我们的结论就是，“联系是普遍存在的”是无用而一般来说（除了特殊地为了搞出来孤立系统而构造的场景之外）正确的废话。

其次，“整体大于部分之和”。对这句话的庸俗的解释，可以这样来做：在一个物理系统中，如果有两个元素或者说子系统，这两个子系统之间没有相互作用，那么，其物理量，例如能量就会有 $E_T = E_1 + E_2$；如果两者之间有相互作用，系统的能量就会有 $E_T = E_1 + E_2 + V_{12}$。于是，非常自然地，我们看到，如果两个子系统之间有相互联系，有相互作用，则自然地整体（E_T）大于部分之和（$E_1 + E_2$）。并且，我们也知道多出来的部分是什么——两个子系统之间的相互作用能量。因此，“整体大于部分之和”是一句平庸的废话。当然，这句话还可以这样来解释：你把一堆没有拼装在一起一起的自行车元器件和一个拼装起来以后的自行车相比，你会看到后者才具有自行车的功能——人可以骑行，而前者没有这个功能。问题是这也是显然的，因为你多了一个拼装的过程，只有拼装起来以后，元器件之间的相互作用才存在了，之前的零散的元器件之间不存在拼装起来之后的相互作用。唯一的一个说得过去的这句话的解释是关于涌现性的：一堆子系统，放在一起，并且其自动施加或者认为施加某种相互作用之后，这个系统的整体会出现一个每一个子系统都没有的行为。例如，一群连在一起的小球构成的绳子会出现波，一群在晶格中的相互作用的电子（它是费米子）会出现电量的运动和自旋的运动的分离，会出现只有玻色子才会出现的超导现象。当然，如果你进一步考虑，你会发现，这个宏观整体出现了微观个体没有的现象还是会回到第一种类型的平庸的废话上去。物理学的研究，例如关于波和低温超导的研究已经表明，绳子上的集体行为——波和晶格中电子的低温超导性，完全可以用一个包含了相互作用的能量函数——称为哈密顿量，以及相应的这个哈密顿量下的动力学来解释。在绳子上的波上，只需要运用牛顿方程考虑绳子的每个部分之间的力。在低温超导的上，只需要考虑电子和晶格振动的相互作用，也就是电子声子耦合。耦合之后每

两个电子形成了玻色子，所以，电子才会有玻色子行为。原则上，物理学家们也在探索高温超导的理论，而这个探索并没有超出考虑电子-声子相互作用加上电子-电子的相互作用的范畴。只不过，我们我们确实还没有建立起来高温超导的解释。大概原因在于电子-电子相互作用的强度不电子-声子一般来说大很多，更加难以计算分析。也就是相应的动力学方程更难以求解，而已。也就是说，在物理中，如果所谓的涌现行为——系统整体上会出现每一个个体层面都不会出现的行为——可以通过现有的物理学框架，也就是能量函数和相应的动力学方程来描述，那么，涌现也就不再神奇了。实际上，我们物理系统的相变，系统的整体状态从一种变成另一种，都是这样得到了描述的。因此，相变尽管还是很神奇，但是，并没有突破正确的废话的层次的"整体大于部分之和"。于是，我们得到结论，"整体大于部分之和"要么是正确的废话，要么就是平庸的废话。

接着，"涌现性"。其实，前面我们已经讨论了物理系统出现的涌现性，也就是系统整体出现了每一个系统的个体层面都没有的行为。因此，涌现性首先就要求系统有多个个体。当然，严格来说，大于等于两个就可以称多个。但是，实际系统中，往往需要达到很大的数量的元素才能出现这种每一个个体都不具有的整体系统的行为。这被Philip Anderson（菲利普 · 安德森）称为"more is different"（多了会不一样）。我们发现，一方面，物理系统的涌现性我们还是在传统物理学科的能量函数和相互作用的框架内来描述，而且很多都得到了这样的描述；另一方面，这并不伤害涌现性属于整体行为这个事实。因此，涌现性仍然是系统科学很好的典型研究问题，或者说，涌现性这个典型现象是如何出现在一个具体系统之中的，从这个具体系统中涌现出来的，仍然是一个很好的系统科学的典型研究问题，但是，这不表示我们不能从把系统分解而描述为下一层的子系统以及子系统之间的相互作用来解释这个涌现性。因此，系统哲学把涌现性太多强调，近乎看做不可解释的神迹，是非常要不得的。我们只能说，涌现现象可能很神奇，离系统中单个个体的行为可能很远，但是其解释往往仍然是可以通过运用科学研究方法和分解和综合来得到的。

"涌现性"还由另一个侧面：各个系统的具体行为，可能在个体的层面或者在整体的层面，差异很大，但是，其实这些行为的涌现机制或者研究方法具有共性。这被Leo Kadanoff（利奥 · 卡达诺夫）称为"more is the same"（多

了就一样)。例如，系统科学就是在寻找提出和解决复杂系统的问题背后的研究方法上的那个“一样”。

最后，我们来讨论最臭名昭著的“传统科学只有还原论，也就是只有分解没有综合，而且还原论也就是分解是落后的”，以及相应的“西方科学主要是还原论，东方（其实指的就是中国）是整体论，整体论是先进的，还原论是落后的”。首先，“传统科学只有还原论”绝对是对传统科学，尤其是物理学的有意或者无意的误解或者歪曲。我们人类一开始看到任何对象，都是具有整体性的。例如，我们看到一个石头落下来，我们肯定把这个石头看做整体。然后，我们发现，所有的落体在后来我们知道空气阻力不强的条件下，行为都差不多。于是，我们说，这个不同质量不同质地不同形状的落体之间的共性，启发我们来构建一个落体的理论。我们先把这个自由落体运动分解成一个两体系统——仅仅比整体的单体系统多一个对象——落体和地球。然后，我们说，如果引入 $F_G = mg$ 和 $F = ma$ 两个方程，前者表示地球和落体之间的相互吸引作用，后者表示在单独一个物体上外力和这个物体的运动状态的关系，我们就可以得到对于任何物体，$a = \frac{mg}{m} = g$。因此，运动状态一样。这时候，你会发现，很自然，你就从单体系统都到了多体系统，并且你的研究目标就是解释小球自由下落这个整体现象。因此，为了解决整体层面的问题，我们不得不对整体做某个分解，然后分解之后运用科学研究方法以及其他方法做进一步计算分析，再合起来回答一开始的整体层面的问题，综合起来，是很自然的一件事情。当然，我们后面会发现，综合这一步往往不是那么简单可以完成，得到的结果也很可能不平庸。但是，总而言之，分解之后需要走综合这一步，是很自然的。

更进一步，如果我们发现，某个重物下落的时候和这个最简单的两体模型相差特别大，我们可以进一步去把这个系统分解。例如，没准我们不再能把这个物体看做一个没有体积和面积的理想小球（质点），而是需要考虑这个物体的形状，或者没准我们不再能把这个物体看做是均匀的物体，没准里面有不均匀的物质分布。比如说，一个外壳，里面一个密度更大的物质构成的小球，中间刘彻空隙，甚至这个外壳本身还有结构——其质量分布式不均匀的，或者内核的质量分布是不均匀的。我们为什么会做这样的猜测呢？如果你去观察过不倒翁的运动，或者一个蚕茧里面放入一刻钢柱再封起来的物体的滚动，或者灌铅的骰子的翻转，你就知道，有的时候，你会

产生一个内部有结构的猜想，然后这个猜想需要把这个“整体”进一步打开，做分解，了解其每个部分的运动，甚至进一步的子结构，再综合起来才能来更好地理解这个整体的行为。因此，先分解，再综合，是在传统科学研究中非常自然的思维方式。

只不过，确实这里有一点点需要注意的地方。传统的物理学家可能确实觉得分解出来的更小的子系统的行为才是更加值得关注的，一旦我们了解这些子系统自己的行为，再加上这些子系统之间的相互作用，我们可以很“自然地”就得到整体系统的行为。于是，在物理学的研究实践中，确实也更加强调分解的过程以及相应的方法、工具、概念。比如说，粒子物理学在很多人看来是比凝聚态物理学、统计物理学更加“物理的”，因为前者正好主要解决分解之后的子系统的认知的问题，后者主要解决已知系统的各个子系统及其相互作用（必要的话，子系统的各个子子系统及其相互作用）之后系统的整体行为的计算分析的问题。但是，这也仅仅是一个价值判断，或者说最多算价值倾向，而不是说，物理学家只注重分解，甚至只看分解，脑子里面只有还原论，而没有整体论。

总结一下，在传统科学研究中，先分解，再综合，很自然很常用，同时关注分解以后的个体和再次综合起来的整体，但是确实，在价值判断上有一定的倾向性，认为分解的方法以及分解之后的子系统的行为的研究可能价值更好，或者更加具有挑战性。因此，“传统科学只有还原论，也就是只有分解没有综合，而且还原论也就是分解是落后的”这句话本身及时对传统科学的误解或者歪曲。

我们再来看这句话的另外一个侧面，片面强调整体性而忽略还原论的大问题。前面其实我们已经看到，为了理解这个系统的整体行为，我们往往需要走到这个系统的内部去，先分解，先打开这个系统，得到构成这个系统的子系统及其相互作用，然后，才能运用合适的计算分析方法来对这个具有相互作用的子系统做研究，才能认识到其整体行为到底怎么出现的。那么，问题来了，如果你坚持整体论更先进，拒绝还原论，拒绝做分解（于是也就没有了综合，不需要综合了啊），你能够多大程度上了解这个整体呢？

举个例子，假设咱们总整体上了解了下面的事实：敲击某个石头可以用来点火，吃某个东西例如杨树皮或者绿毛菌或者青蒿[13]可以治疗某个疾病，

[13]纯粹举例子啊，这些东西直接吃应该都没什么效果的。

咱们作为一群科学研究者，可以怎么做？当然，停留在各自的整体的层面，不断地去挖出来同样质地（甚至大小、形状、出厂日期和时刻，出厂那天的风温度和水），不断地去扒树皮，找绿毛菌，挖青蒿，然后用它们固然也可以。但是，如果我们想更大程度上利用这些事实来造福这会，你说怎么做？很简单啊，用物理手段或者化学手段打开这个石头看看，识别出来到底这个石头的什么材料或者什么特征使得它可以用来点火；用物理手段或者化学手段分解开杨树皮、绿毛菌和青蒿看看，到底这些东西里面的什么东西或者什么因素使得它们可以治疗某个疾病。然后，针对这些找出来的具体因素，来选择、设计甚至生产更好的有相应的效果的物体。

当然，有的时候，你会遇到，不是一种物质或者一种特征使得这个物体有了这个整体的作用，而是多个特征或者多种物质，甚至特征和物质这两个维度的多个指标的组合才会使得这些物体有了这个整体作用。那怎么办？找不到单一因素的，就不去找吗？还是，先尝试单一因素看看是否能够找到谁在发挥作用，然后不行再去试试多个因素的情况？这不是很自然的事情吗？例如，科学研究已经发现，药物副作用不仅仅需要单独考虑每一种药物还需要考虑组合，重金属对人的影响也是如此，基因对生物发育的影响也是如此，慢性病也需要考虑共病——例如得了某一种疾病的人可能具有更大的几率得某另一种疾病或者同时得了某两种疾病的病人的生存机会和治疗方案跟得每一种加起来的情况不同。

总结一下：没有还原的整体论要么什么都干不了，要么是非常危险的。其危险性就在于，会抑制研究者去做分解和综合，而是仅仅停留在整体，没有分解，没有还原，于是也没有了综合。

现在，我们来回到所谓西方还原，中国整体，西方思维落后，中国思维先进，你看最终西方思维还得回到整体走到中国思维的说法。首先，前面已经说了还原和整体的关系：还原以后的整体才是真正的整体，没有还原的整体就是胡说八道，就是跟着感觉走，完全不可能开展任何严肃的科学研究。希望回到的是还原以后的整体，而不是没有还原的整体。因此，不是说中国的整体论就在山顶上等着希望爬上来呢，而是，还原论通过先还原再整体根本就跟你不分界的还原不在一个层次。

其次，那为什么中国人历史上，确实更整体呢，而且是没有还原的整体呢？这是一个文化和历史的研究课题。我是科学家，我不懂。所以，下面仅

仅是我的大胆的猜测。我认为这可能和中国古代的所谓学术界文化界主要关注人的道德和心灵有关，而对比一下，古希腊人更加关注客观世界，尽管古希腊之后西方很长时间也变得主要关注人。为什么关注人和关注自然会不一样？因为自然容易研究，容易分解出来，把主要因素孤立出来，而人以及人的道德和心灵基本上没法去分解出来。你关心一块石头下落，那基本上和另外一块石头就没什么关系，你也可以进一步打开这个石头再来观察和做实验。人呢？你能够比较容易地把人和其他人分开，把人的负责道德和心灵的部分和其他部分分开，并且分开以后还可以做实验吗？直到今天，我们才基本上刚刚开始用测量大脑活动的方式来间接地研究人的思考和意识从而间接地研究人的道德和心灵。而且，我们关注道德和心灵主要还是为了考虑人际关系和秩序的问题，因此，那就更加不能做分解了。因此，历史上，我们甚至连用工具来做分解做测量的理念都基本没有。王阳明的"格竹子"的故事，就是一个很好的例子——就是盯着竹子不断地看，请问你能够看出来点什么？

因此，尽管文化和历史方面，我根本就是一个小学生，我还是要强烈地提出来对"西方还原，中国整体，西方思维落后，中国思维先进，你看最终西方思维还得回到整体走到中国思维"的批评！一直不分解，就是要靠感觉，靠整体感知来看整体，那我们这个国家的科学永远没戏！靠系统哲学，而不是系统科学，那我们这个国家的科学永远没戏！

好了，现在，我们已经对系统哲学做了非常严肃的批评。那么，其真的一无是处吗，需要被完全抛弃吗？不是的，其主要问题在于片面强调和没有采用科学研究方法。而且，其片面强调，在当时甚至现在物理学界甚至整个科学界对分解的研究工作更加推崇，认为还原的工作更加没有挑战性，一旦解决了分解的工作之后综合那一步是简单的自然的，这个背景下，也是可以理解的。但是，一个真正的系统科学欣赏者、使用者、学习者，需要超越这个境界。

怎么超越呢？首先，坚持用科学研究方法（再次强调现实或者实验的启发、概念和数学建模、实验检验、知识的系统化）及其背后的批判性思维，尽量来解决实际系统的问题。其次，我们要把系统哲学对还原论和整体论，分解和综合的态度改成类似下面的表述：

- 联系存在的时候，如何把联系显示出来，如何描述这个联系，如何就

这个联系做分析，并且对分级结果做检验，

- 涌现性：系统整体确实会出现其每一个个体都没有的行为，甚至还会出现这样的整体行为的转变，如何建模描述这个它，并对这个描述做检验，
- 传统科学分解和综合就是相互配合的，没有还原的整体论是没用的和危险的，但是，确实综合这一步不是平庸的，可能要求新的计算分析方法，可能会导致新的涌现行为的出现。

1.4 本章小结和后续章节主要内容

在这一章中，我们先做一个关于学科大图景的铺垫，也就是讨论了什么是和为什么在学习、研究和应用某个学科的时候需要掌握这个学科的大图景。然后，我们非常粗糙地简要地展示了系统科学的学科大图景。最后，我们讨论了系统科学和系统哲学的区别和联系，并且呼吁大家不要去做系统哲学家，而是要去做掌握了系统思维的科学家。

对于最没有耐心的，或者已经可以比较好地理解本章内容的读者来说，对于大概掌握什么是系统科学这个目的来说，本章的内容就够了。在本章最后，我也把我在《系统科学导引》[4, 5] 对系统科学的总结稍作修改，分享在这里。

$$\text{系联} = \text{联系}^{1} + \text{联系}^{2} + \text{联系}^{3} + \cdots$$

从具体系统中来，到具体系统中去

从孤立到有联系，从直接到间接，从个体到整体，上下左右贯通

More is Different, More is The Same

（一片两片三四片，构成系统出涌现；五片六片七八片，飞入系统都不见）

这里的每一行未来大家都会进一步体会到。

除了总结性章节，后续每一个章节，就是用案例来体现系统科学的典型思维方式和典型分析方法，有的时候也用那些案例来展示一下系统科学的学科典型责任，帮助你建立起来一些信心——系统科学确实是可以把某些不用系统科学解决得不够好的问题解决的更好的。

大家即将开始一个美丽、有挑战性、有收获的旅程。祝大家旅途顺利，有痛苦有快乐，于是享受痛快。

第二章　什么是科学

Science is a way of thinking much more than it is a body of knowledge.

科学更多地是一种思维方式，而不仅仅是一团知识。

– Carl Sagan

如果只能在“系统”和“科学”里面选一个，那么，系统科学就算没有系统，也不能没有科学。因此，我们这一章先来体会一下什么是科学。

可能对于很多人来说，科学就是科学知识。例如，物质由分子和原子构成，食盐是氯化钠（$NaCl$），日地距离是 149,597,870 公里，地球半径是 6357 千米，二二得四（$2 \times 2 = 4$），三角形内角和是 $180°$[1]，直角三角形的直角边的平方和等于其斜边的平方，真核细胞包含细胞膜、细胞核以及其他细胞器，等等等等。

但是，这些科学知识，或者更准确地说，一个个学科的学科概念知识或者事实性程序性知识，都是科学研究科学探索过程的结果。因此，科学更应该说，是科学研究科学探索的过程，以及指导这些过程咱们做的超越学科概念知识和事实性程序性知识的那些更加高层的知识。那么，科学研究和科学探索靠什么，那些更加高层的知识是什么呢？

[1]这里有一个微妙的问题：数学知识，当还没有用于解决现实世界的问题的时候，当从现实世界之中抽象提炼出来以后，算不算科学知识？严格来说，不算。后面，我们会谈到为什么不算。

2.1 科学研究方法和科学精神以及批判性思维

其中，最重要的是科学研究方法以及科学精神。什么是科学研究方法？我们忽略更加细节层面的例如用望远镜来观察天体，用显微镜来观察微生物，用脑成像仪器来观察人类的思维和情感等的所谓方法，科学研究方法可以提炼为下面这个过程：现实或者实验的启发，概念建模和数学建模，实验检验，以及知识的系统化。

现实或者实验的启发指的是，通过观察现实以及相应的经验体验，或者根据对现实的观察以及相应的经验体验而进一步设计的实验（跟现实相比，往往主要因素更少，更突出，并且测量起来更方面），来提出问题和提出猜想的过程。概念建模指的是，对现实对象通过归纳和分类等方式，抽象出来一些这些对象的共性特征，从而得到外延指代明确，内涵往往可以被明确地表达出来的一个指代这些外延和内涵的词或者符号的过程。数学建模指的是，用一个数学结构来描述这些概念对象，以及这些对象之间的关系如果有多个对象的话。有了描述对象关系的数学结构或者说数学表达形式之后，我们就可以来对这个数学表达结构做运算，得到一些计算结果。

然后，我们就可以进入到科学研究方法的下一个环节——实验检验。也就是，把上面得到的计算结果，在最接近计算时所假设的场景的现实场景下，来和对现实场景所做的测量的结果，作比较。如果计算结果和测量结果在误差范围内相符，并且原则上，可以进一步提升这个相符的程度，只不过由于计算误差或者测量仪器的误差，或者其他非关键因素造成的影响，暂时还不能更加相符，则我们可以认为“实验检验没有证伪或者说否定概念模型和数学模型”。然后，我们需要在多个这样的场景下来重复这样的对比，最好是某些参数改变了之后再一次来做这样的对比。如果计算结果和测量结果仍然相符，那我们就可以认为，概念模型和数学模型正好描述了相应的现实场景的可能性比较高。

但是，从逻辑上来说，实验检验永远没有办法验证概念模型和数学模型，因为任何有限次的实验仅仅能够证明，迄今为止，我们的概念模型和数学模型还不是错的。当然，随着检验的次数越来越多，这个概念模型和数学模型正好描述了相应的现实场景的可能性会越来越高，但是永远也不会等于 1，也就是完全可靠。这就是Popper的科学的可证伪性的概念。我们稍后会回到这个问题。现在，暂时，我们把经过了大量实验检验的命题，或者说

概念模型和数学模型，就当作科学知识。

最后，知识的系统化指的是当我们积累了一定量的概念、模型和命题之后，我们希望来把这些概念、模型和命题联系起来达成以数量最少的基本概念和基本假设为基础，通过逻辑演绎关系就可以得到这些概念、模型和命题，同时也就实现了最更大的统一性的追求——也就是尽可能地用统一的理论来描述更多的看起来不同的现象。这一点，在物理上尤其量子力学和电动力学上有很好的体现，在数学上尤其是在了平面几何以及微积分有很好的体现。在这里，我们选择数学的例子。

其实在Euclid（欧几里得）之前，人们已经积累了一定数量的概念和命题，但是由于这些命题之间的关系比较零散，使用和学习这些命题比较复杂。那Euclid就完成了对这些命题的梳理，使得这些命题成了一个从最基本的定义和假设出发就可以得到的一个有联系的知识体系。注意这个梳理是非常具有创造性和挑战性的。第一，面对几百个命题，你怎么才能反向推理得到那些最基本的命题和概念从而把所有的命题都变成这些最基本的命题的逻辑演绎推理的结果呢？第二，为什么会选择依靠逻辑演绎推理来当作主要关系呢？而且，竟然这样的一个体系搞出来之后，平面几何的基本体系这么些年就不需要太大的改变。

微积分的发展也是一个系统化的过程。首先，受到物理学（主要是运动学的位移、速度和加速度）的启发，结合曲线的切线，序列的求和，曲线下的面积，函数求极值等等数学问题的启发[2]，Isaac Newton（伊萨克 · 牛顿）和Gottfried Leibniz（戈特弗里德 · 莱布尼茨）几乎同时独立地提出了导数的定义。顺便，我们今天用的名称和符号大部分来自于Leibniz。Newton把微分（导数）和积分称为我们今天已经基本不用的流数和反流数。但是，那个时候定义的微分有很大的问题，更多地是一个计算的技术，而且依赖于一个说不清楚的“无穷小”的概念。

---

[2]注意，这里看起来不起眼的“启发”两个字包含了历史上大量物理学家和数学家的贡献，例如René Descartes（勒内 · 笛卡尔）的坐标系把图形和曲线结合起来，Galileo Galilei（伽利略 · 伽利莱）把运动学的研究从速度转向速度的改变，祖冲之的内外正多边形夹逼来计算圆的周长从而得到 π 的近似值，Bonaventura Cavalieri（卡瓦列里）通过Cavalieri 原理来构建面积到体积的关系，Zeno（芝诺）提出的对瞬时速度概念的挑战，等等等等。原谅我这里为了突出后面的系统性忽略了前面的启发的部分。

例如，当计算 x^2 的导数的时候，我们先计算一个除法，

$$\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\frac{x^2+2x\Delta x+\Delta^2 x-x^2}{\Delta x}=2x+\Delta x, \tag{2.1}$$

然后，让这个出现在商里面的 Δx 变成零。看起来好像能算，但是其中有严重的逻辑问题：例如，实际上上面的除法算式是一个 $\frac{0}{0}$，因为反正我们最后需要让 Δx 变成零；此外，既然 Δx 最终需要变成零，那么为什么不在得到商之前就让它变成零，非得在得到商之后来做；这导致 Δx 有的时候得当作零，有的时候不能当作零，甚至得当作一个趋于零的过程，那么，这个过程还是一个合理的数学对象吗？这被称为第二次数学危机[3]。

于是，后来的数学家就要来解决这些问题，第一使得每一个概念和命题以及相应的计算在逻辑上说得通，第二最好找到一个定义和假设的起点，并且这个起点包含的定义和假设越少越好，就可以得到上面这些概念、命题和计算。这些数学家包含[4]把序列极限的概念严格化的Augustin Louis Cauchy（奥古斯丁 · 路易斯 · 柯西）（序列的柯西收敛性）和Karl Theodor Wilhelm Weierstrass（卡尔 · 特奥多尔 · 威廉 · 魏尔斯特拉斯）（序列极限的 $\epsilon-N$ 语言和函数极限的 $\epsilon-\delta$ 语言，处处连续处处不可微的函数），构建起来从柯西收敛到序列收敛所需要实数的公理化定义尤其是其中的实数的完备性的Julius Wilhelm Richard Dedekind（尤利乌斯 · 威廉 · 理查德 · 戴德金），走通了微分和积分联系所需要的中值定理的Joseph-Louis Lagrange（约瑟夫-路易斯 · 拉格朗日）。因此，我们今天学习微积分的时候看到的已经成体系的微积分，从集合和映射，学习到实数以及实数上的闭区间到自身的连续映射的不动点定理，到数列和数列的极限，到函数的极限，到微分（导数），到中值定理，到 Newton-Leibniz 微积分基本公式，实际上是前辈数学家不断地把微积分严格化和系统化的结果。实际上，这里仍然有一个问题，那就是集合又是怎么定义的。这个问题引发了第三次数学危机，并且使得数学发展出来了集合的公理化定义以及范畴论。

现在我们了解了什么是科学研究方法，就可以来领会什么是科学精神了。那就是，任何需要或者会影响现实的研究对象和研究问题，都需要运用科学研究方法来开展研究，因此，这些问题的答案必须逻辑上说得通（基于

[3]不能表示为两个整数相除——也就是有理数——的无理数的出现算第一次数学危机。

[4]同样，原谅我这个懂点数学的物理学家仅仅列出来其中的极少数。

演绎逻辑的计算和证明)，而且可以通过实验检验。在个人的层面，我们只能把经过了自己的理性检验的概念和命题或者说知识当作进一步认识世界的基础，而理性检验就包含逻辑上说得通以及可以通过实验检验。当然，不同的学科略有不同。数学只要求逻辑上说得通就可以，但是科学强调两者都走得通。如果实在暂时存在逻辑上说不通，在后续继续开展研究争取逻辑上说得通的前提下，只需要可以通过实验检验也可以。这个面对世界的态度——不能通过自己的理性检验的东西就不接受，不用来当作进一步理解世界和做决策的基础——被称为批判性思维。也就是说，科学精神不过就是用科学研究方法以及科学研究方法背后包含的批判性思维来解决所有——直接和间接和现实世界有关会直接或者间接影响现实世界——的问题。

当然，你问我，有没有完全直接或者间接不影响现实的但是人们还在思考的问题？注意人也是现实的一部分，人的思想和思考也往往是直接或者间接来自于和影响现实的。我认为几乎没有，但是不敢断定完全没有。因此，我认为几乎任何问题都应该用科学研究方法并且遵循批判性思维来开展研究，来回答，来检验。但是，你一定要问我，是不是完全就没有不这样来研究和回答的问题，我不敢断定。比如说，自然科学和社会科学的问题，都是直接和间接影响现实的问题。有人说，人文学科中研究者提出和在思考的问题，是不是就不是直接和间接影响现实的问题，就不应该用科学研究方法和批判性思维来研究回答和检验了？我个人相信这是对这个问题的研究还没有到达足够深入的层次，还不能用实验和测量的方式来获得启发和检验，或者还不能用概念建模和数学建模来描述。只要继续研究下去，向着可测量的方向，必然有一天会走到需要采用科学研究方法和批判性思维来研究回答和检验的层面。例如，在没有脑活动成像的实验设备之前，对于思维活动的研究只能靠研究者主观去猜（所以心理学上有精神分析法和四体液理论)，尽管有了实验设备还是只能够间接地研究思维活动——也就是通过研究思维活动发生的时候的脑的物理化学信号的活动来研究，但是，很有可能，继续沿者这个方向，有一天我们是可以研究意识本身的运动的。一旦我们对意识的研究能够取得突破，那么，例如人文学科之一的艺术创作也就成了一个可以用科学研究方法来开展严肃研究的对象了。因此，我个人相信，这世上，不存在不能科学研究方法和批判性思维来研究回答和检验的问题，如果看起来有，那也仅仅是暂时看起来如此。我这样的想法或

者说信仰，有的时候，被称为“科学主义”[5]。所谓信仰的意思就是当前条件下还不能被逻辑和实验严密论证，但是，某人或者某些人选择了相信的命题。

批判性思维第一次被明确提出来是在Descartes的《谈谈方法》[6] 一书中。Descartes提出来批判性思维的动机是回答什么是可以永恒成立的数学知识，以及如何更好地解决问题。如果没有这样一个标准，那么，很有可能，前人形成的知识会被后来人推翻，后来人的知识又会被后后来人推翻。为此，Descartes提出来如下的方法[6]，

1. 凡是我自己没有完全搞清楚的东西，我绝接受它，把它放在脑子里面，用它来进行下一步思考；
2. 如果问题比较麻烦，则分成不同的层次和角度来思考，逐个解决；
3. 按照次序进行思考，从最简单的开始，到复杂的，如果找不到内在的顺序，也设定一个顺序；
4. 回顾是否做了全面的考察，彻底的考察。

今天，我们往往把第一条叫做批判性思维——只有经过理性检验的概念和命题才能成为科学知识的一部分。然后，我们结合物理学的发展稍微拓展一下理性检验的内涵，除了Descartes的逻辑演绎，我们还包含了来自于物理学的实验检验。

下面为了加深对科学研究方法的理解，我们去看看历史上科学研究方法之中的每一条是如何被创造或者提炼出来的。不过，这是物理学家的物理学史，不是历史学家的物理学史，因此很多地方时间顺序上是不对的。我们更家关注逻辑顺序。在那之前，我们来补充科学研究中另一个非常重要

[5]注意，科学主义并不主张科学的结论、科学的当前知识都是正确的，超越其他学科的。科学知识不过是科学研究研究方法和批判性思维用于研究科学研究对象得到的结果。如果有了新的现象，当前的知识显然是可以并且需要被挑战的。科学主义仅仅主张无论什么问题，都应该采用科学研究方法和批判性思维来研究。当然，反过来，对于不测量不受现实启发就开始的思辨研究，不尽量概念化和数学化的研究，不做实验检验的研究，科学主义确实是鄙视的。

[6]不是原文，而是概述

的典型思维方式，尽管通常没有被放到科学研究方法之中。这就是分解和综合。

2.2 从“布朗运动到分子”看到分解和综合

分解的含义是我们把一个研究对象打开进入到这个研究对象的内部看到其内部的元素以及这些内部元素往往具有的相互作用。综合的含义是在把一个对象的内部元素以及元素之间的关系搞清楚之后，来描述或者解释这些元素构成的整体也就是原始的对象的行为和属性。分解和综合还可以嵌套使用。也就是，不断地把一个元素当成整体对象，去做其下一层的分解，以及不断地去把已经搞清楚的下一层合起来来看到上一层。综合还指把和当前对象紧密[7]相关的同层对象纳入进来组成更大的整体，来理解和回答这个更大的整体的问题，甚至更进一步，从这个更大的整体的角度来看当前层的个体再整体中的作用。

比如说，我们看到一个在转动的不倒翁，我们会发现其行为和完全各向同性的物体不太一样。当然，如果你懂得物理，你会猜测这是重心低的缘故。但是，就算你不知道，那你自然地就会去想我打开一下这个不倒翁，看看里面是什么。类似地，如果你遇到一个行为不一般的骰子，对方可以任意控制其哪一面是正面，就可以去打开这个骰子看看里面是否灌水银了。我很喜欢小的时候我父亲给我做的一个玩具——把蚕茧打开，放进去小钢珠，再缝上。然后，拿着这样的蚕茧和真的蚕茧去滚动，猜猜哪一个是不一般的蚕茧。制作这个蚕茧仪器，插入一张图，两个蚕茧滚动的一个对比画面，以及打开两个蚕茧的样子。 你很容易就会发现，这些真假蚕茧的行为大概可以分成两类，然后分别打开看一下就可以知道，这两类背后有物理上的区别——一个是由蚕茧外壳和蚕蛹构成的，一个是由蚕茧外壳和钢珠构成的。

那在物理学的发展历史上，有没有一个体现综合和分解的例子呢？其实，绝大多数物理学研究中，分解和综合都发挥了重要作用。不过，布朗运动是其中非常典型的例子。我们来回顾一下从发现布朗运动到确立物质是

[7]判断是否紧密是一个具有挑战性的问题。但是，实在不行，就试错——包含少量的同层对象和相互作用，看看是否把所感兴趣的上层对象的问题解决得更好了，是否还可以和有必要通过包含其他对象来做得更好。

由分子构成的这个物理学和化学的发展过程，从而更好地理解分解和综合。按照我们现在的知识，有些物质是由分子构成的，原子先通过原子间相互作用形成分子，分子再通过分子间相互作用形成物质（物质再构成物体，不过在这里我们经常不区分物体和物质），例如液态水；有些物质是由原子直接构成了晶格结构，不需要在中间层次构成分子，例如固态金属。不过，我们总是可以粗糙对说，物质是由分子构成的，分子是由一个或者多个原子构成的。

其实，提出来物质应该是由一些最小单位构成的，若干个这样的最小单位加上空隙的组合构成的物质，从哲学思想的角度来说并不难。实际上，古希腊的哲学家Leucippus（留基伯）和Democritus（德谟克利特）就提出和发展了这个猜想[8]。如果你试着去切开一下某种物质，然后发现，一定程度上，这种物质还是这种物质，就会自然地提出这个猜想。但是，很长一段时间内，这个仅仅是猜想，因为验证这个猜想需要技术上很晚才发展起来的实验手段。例如，今天，你可以用扫描隧道显微镜来直接看到分子，你还可以通过光谱、质谱和 X-射线成像等方式来直接间接地观测分子。但是，这些都是物理学发展到专门研究分子原子以及亚原子世界的量子力学之后的事情。那么，在那之前，人们是怎么来验证物质由分子构成的呢？

尽管在这一节中，我们会把重点放到Robert Brown（罗伯特 · 布朗）所发现的Brown 运动和Albert Einstein（爱因斯坦）的解释Brown 运动的分子运动论，但是，我们还是把原子分子论的提出也稍微介绍一下。

基于Leucippus和Democritus的原子论哲学思想，以及基于原子相对质量的间接测量，例如通过测量同温同压下不同气体的密度[9]，John Dalton（约翰 · 道尔顿）提出了有一定科学证据的但是还不是完全正确的原子说。其中一个重要证据是定比定律，也就是，在一种由两种原子构成的物质中，两种原子的数量的比例往往是一个固定的数。今天，我们有了现代化学知识，当然知道，这是因为两种元素的原子核外最外层电子需要用某种方式适配。例如，每一个氧原子 O 最外层有 6 个电子倾向于得到两个电子凑满

[8]实际上，Leucippus和Democritus把这个最小结构称为“原子”。稍后我们会解释分子的概念的提出。

[9]注意，按照现代科学知识，这时候测量到的其实是气体分子相对质量。不过，当时，还不能区分气体分子和气体原子，没有单原子分子或者多原子分子的概念，所以，我们在这里也暂时说这个测量可以得到原子的相对质量。

壳层 8 个（为什么 8 个是满壳层，为什么倾向于凑满 8 个，需要由量子力学来解释），每一个汞原子有 2 个电子倾向于失去这两个电子使得剩余的电子满壳层，于是，刚好氧化汞的原子数比例是 1 : 1。类似地，铝原子的最外层是 3 个电子，倾向于失去这三个电子使得剩余的电子满壳层，于是，刚好氧化铝的原子数比例是 3 : 2。当时，是先发现这样的固定比例，然后来猜测其原因。其中一个猜测就是物质是由原子构成的。

那为什么会进一步发展为物质是由分子构成的，分子是由原子构成的呢？人们发现，前面所说的定比定律在很多时候不对：实验上观测到，就算对于同种原子构成的“物质”这个确定的比例可以是不定值。例如在由氧原子和铁原子构成的物质，就会出现这个不定值。当然，今天，我们有了现代化学知识，当然知道，这是因为氧和铁的化合物有两种：氧化铁和氧化亚铁，而它们各自的氧原子和铁原子的比例是 3 : 2 和 1 : 1[10]。或者，我们写成 1.5 : 1 和 1 : 1，因此，只要我们调整一下氧化铁和氧化亚铁的比例，我们可以把氧原子和铁原子的比例在 1.5 和 1 之间随意调整。

Amedeo Avogadro（阿莫迪欧 · 阿伏伽德罗）注意到了这个现象，并且提出了分子来解决这个问题：原子构成分子，并且可能可以构成多种原子，对于给定的分子其中的各个原子的数量比例是确定的。你看，这样，就可以发现，对于氧铁化合物的混合物，这个比例既可以是 1.5 : 1（全部都是氧化铁）也可以是 1 : 1（全部都是氧化亚铁），或者它们之间的任何值，只要调整氧化铁和氧化亚铁的比例。顺便一旦有了分子的概念，就有了单质和化合物的区别，单原子分子和多原子分子的区别，也有了化学纯的物质和混合物的区别。单质（化合物）是由单一（多）种类的原子构成的，单（多）原子分子的每一个分子内有一（多）个原子，化学纯的物质（混合物）具有单一种类（多种）的分子。

因此，从物质由原子构成到物质有分子构成（单一物质对应着单一分子），分子由原子构成（每一个分子由比例固定或者说数量也固定的原子——后来知道通过获得和失去电子或者共享电子——构成），这样能够解释的事情就更多了。原则上，再往下走，就要去看原子在构成分子的时候的结

[10]在氧化铁中，铁原子失去 3 个电子，而在氧化亚铁中铁元素失去 2 个电子。铁原子的最外层有 2 个电子，一般来说应该是倾向于失去两个电子。但是，铁的次外层电子也不稳定，非常容易失去，于是就有了失去三个电子倾向。

构了。看到了，那就是直接证据。不过，那个时代我们并没有准备好这样的观测设备。

因此，上面的这些都是按照物理现象和化学现象猜出来的，尽管猜出来以后可以解释更多的现象了。那么，有没有其他的物质是由分子构成的比较直接实验证据呢，在当时的观测条件下，不用到电子隧道显微镜等设备的前提下？有，Brown 运动。

Brown 运动是由植物学家Brown在研究仙女扇（Clarkia pulchella）的受精过程中发现的。Brown先发现了在水中的活体花粉再显微镜下的近乎杂乱无章的振动型的运动。图 2.1 可以当作一个布朗运动的例子。然后，他猜测，这可能是雄性花粉颗粒的某种有一定目的性的行为。于是，他就用了确定已经死掉的花粉重复了这个实验，竟然也发现了同样的运动。于是，那就不是花粉的死活和性别的事情了。后来这个实验就被拓展到了各种小颗粒上，例如灰尘，石墨小颗粒等等等等。进一步的研究还发现，这个运动不会停下来。有人真的观察了一年，一直都不会停。顺便，为什么这个一直都不会停是重要的呢？因为这个运动的一个可能的原因是花粉放进去水里面引起的扰动。按道理，这个扰动随着时间会效果逐渐消失的[11]。因此，既然不停，就表示不是花粉放进去这个动作带来的扰动。从各个小颗粒都有来看，又发现，大概率不是因为这些小颗粒，而是因为水。

那到底水里面的什么使得这个运动产生而且一直不停呢？Einstein解决了这个问题：因为水分子对小颗粒的撞击。当颗粒比较大的时候，每时每刻或者说很短的时间间隔内，来自于各个方向的撞击平均起来刚好相互平衡，因此大颗粒基本看不到在水中的杂乱无章的振动型的运动，除非放进去的时候引起的扰动。当颗粒足够小的时候，每时每刻或者说很短的时间间隔内，小颗粒只受到来自于很少的某几个方向的撞击，因此小颗粒就会感受到里的作用，从而产生杂乱无章的振动型的运动，而且这个碰撞和运动只要有水分子在，就不会消失。

那你可以问，肯定是水的单个分子的作用吗，而不是若干个分子组成的小团的作用吗？也就是，水分子可能不是独立碰撞小颗粒的单元，若干个水分子构成的小团才是独立碰撞小颗粒的单元。这无所谓的，那你就把这样的小团叫做你这种物质的分子——某种意义上整体运动的代表了这种物

[11]先不要问我，物理上为什么会逐渐消失，但是，生活经验中，确实扰动会逐渐消失的。

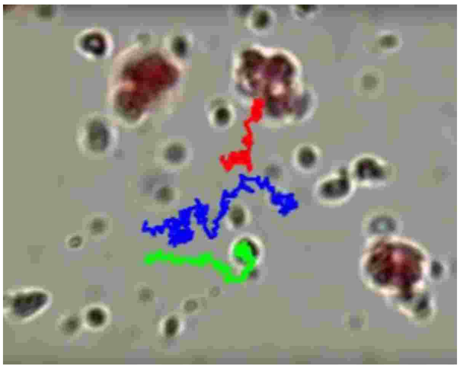

图 2.1: 一杯子脏水显示的粉尘颗粒的 Brown 运动。彩色部分记录了所跟踪的三个粉尘颗粒一段时间的轨迹。图片从 Youtube 视频“Physics of Life - Brownian Motion and Brownian Motors”[12]截取。

质的最小集团。

那你可以问，水分子在没有小颗粒放进去的时候，仍然会这样运动吗，分子之间相互碰撞？然后分子其实也展现这样的杂乱无章的振动型的运动。有可能。而且，这个运动的强度有可能还跟温度有关。温度越高，分子自己的这样的运动——允许我偷懒就称之为分子的热运动——会强度越大。这个你可以从温度越高的水往跑热气越快这个观察猜出来——往外跑气就是分子动啊动，挣脱了水面的束缚。于是，你猜测，布朗运动的某种观测量，也应该和液体的温度有关。

这就进入到了科学研究的测量的阶段。经过测量，发现，不同时刻的小颗粒的运动几乎是统计学上不相关的，下一个时刻的运动方向是各个方向等几率的，从一个时间起点和相应的位置原点开始统计[13]平均运动距离和时间有 $\overline{s^2} \propto t$ 的关系。注意，这里的平均距离的计算方式是，先求一个平方然后求均值。因此，如果还原到距离，那就是正比于 $\sqrt{t}$。

Einstein根据分子动能和温度的关系，从分子动能到受力的推理，各个方向的受力到正态分布的推理，计算 [7] 得到了和上面的关系相符的理论结

[13]在这里，统计的含义是多次实验，取平均。

果[14]，

$$\bar{s^2} = 2Dt = \frac{2KT}{f}t. \tag{2.2}$$

其中 K 是一个常数（成为波尔兹曼常数），T 是温度，f 是摩擦系数。你可以看到，这个距离和温度成正比，和时间的开平方 $\sqrt{t}$ 成正比。

我们就不去严格重复Einstein的计算过程了。我们来跳出来，看一看，Brown 运动和相应的计算分析，怎么就证明了水是由水分子构成的。首先，我们前面已经说了，任何悬浮在水中的小颗粒，这个现象都有。因此，只能从水找原因，而不是从小颗粒找原因。原则上，你如果怀疑水不是纯的，那可以先蒸馏，或者先用化学反应来检验，直到里面确实除了水什么也没有，再来重复这个实验，验证仍然有这个运动。或者反过来，往水里面加入任何其他的不溶解于水，甚至溶解于水的杂质（只要别太多，把水都吸收了，或者搞成摩擦力很大很大的浓稠的泥浆了），也可以验证这个运动仍然可以观察到。也就是说，尽量排除其他一切可能的因素，得到只要有水存在就可以出现这个现象。甚至更进一步，只要有液体存在，就可以出现这个现象。不过，在这里，我们仅仅用水中的Brown 运动当例子。于是，我们就得到，原因肯定就在水上。

得到这个原因之后，反过来从运动和受力的关系，我们就发现，这样的运动肯定时时刻刻要受到不平衡的力的作用，否则不会出现运动诡计上的折线——折线意味着运动方向上短时间内的快速改变。那么，这个力来自于哪里呢？只能来自于水，前面我们已经把其他因素都剔除了，来自于水对小颗粒的作用。接着问，什么作用，怎么作用的？从折线运动特别像碰撞，自然就能猜测出来，可能来自于水里面的某个东西对小颗粒的碰撞。水里面的这些东西还得基本上是独立的运用，而且是在水整体上不存在运动的时候，这些东西还能够独立运动。于是，这些东西只能是水的独立运动小小颗粒。

进一步，基于这个逻辑推理，结合当时统计物理学已经给出的速度分布律，已经可以从力学中得到的碰撞的规律，已经在数学上准备好的正态分布函数，就可以建立起来一个数学模型，来算一算这个现象当中的那些可观测量会有什么结果或者什么关系。发现，其中的关系还真的和实验测

[14]采用了 [8] 的记号来简化了 [7] 中的结果。

量结果相符。这就是整个上面的过程。于是，这个水的独立运动的小小颗粒也就基本可以认为其存在了。至于其是否被称为水分子，或者和其他方式测量得到的或者定义的水分子（例如前面提到的当作物质的化学性质的基本单位的分子）是否一致，那就是另外的事情了。

我们来看这里面用到了哪些科学研究方法，或者说，如果回到当年，可以从这个过程中提炼出来哪些科学研究方法？首先，现实和实验的启发——通过观测和测量来得到现实和实验的启发。接着，概念建模和数学建模，以及这过程中的抽象和逻辑推理——通过尝试各种小颗粒来得到肯定来自于水，通过基于力学和参考碰撞来得到肯定来自于水的独立运动的小小颗粒，并且结合统计物理学的速度分布律还有数学的正态分布建立和求解数学模型。然后，对比实验和理论以及进一步的检验——实验和模型计算结果相符，而且原则上可以调整温度、摩擦力等参数来给其他实验做预测，进一步检验这个模型计算结果。最后，概念和方法的系统化梳理。这其中有水分子（水的独立运动的小小颗粒）的概念，有用带时间的随机分布函数来描述物理系统的状态的概念（背后更深刻的是随机微分方程的概念），有演绎逻辑在发挥作用，有科学精神（理论结果一定要和实验相符，理论结果本身一定要符合逻辑）在发挥作用。更重要的，这里还有分解和综合在发挥作用。

分解和综合体现在哪里？首先，我们观测到花粉小颗粒的运动，然后走向了原因肯定来自于水和花粉小颗粒的相互作用。这里，从花粉小颗粒自己，走到花粉小颗粒和环境的相互作用，就是一个分解和综合——从仅仅关注小颗粒和环境中的小颗粒，走到了同时关注小颗粒和环境。接着，我们发现，任意的足够小的小颗粒都行，走到了关注这里的环境，也就是水，这也是分解和综合，只关注小颗粒和环境中的环境。然后，我们根据力学，从关注水走到关注水它自己里面的独立运动的小小颗粒——因为观测到的花粉小颗粒的运动特别像碰撞。这是研究对象上的分解和综合。其实我们还有知识上的分解和综合，我们从一个力学现象，结合了统计物理和数学，合起来解决了这个问题。不过，在这个例子中，我们先主要关注研究对象上的分解和综合。

分解和综合是科学研究中非常自然而常用的方法。任何一个现象或者属性，我们都自然地想找到为这个现象负责的最基本的单位。例如常温常压

下，一大块食盐是食盐——吃起来咸的颜色是白的密度是某个具体数值[15]，切下来一小块往往也还是食盐，但是是不是不断地切下去还保持食盐是食盐呢？如果我们能够找到这个保持性质的最小单位，再切下去就不再能保持这个性质的单位，那我们就可以以这个单位作为食盐的典型代表来开展研究了。甚至再往下，我们可以通过继续切分，以及研究食盐和其他物质的转化关系来研究这个基本单位有没有更加基本的但是不再保持其物理化学属性的结构。例如，我们把食盐和浓硫酸放在一起看看会发生什么，把食盐和硝酸银放在一起看看会发生什么，电解食盐看看会发生什么，把食盐放水里溶解看看会发生什么，我们就可以进一步发现钠元素和钠离子，氯元素和氯离子。甚至，我们可以进一步把钠离子或者氯离子用某种方式来打开，或者发生转化，或者和其他的东西发生反应，来看看钠离子或者氯离子有没有更加基本的结构。原则上，除非我们发现，最后有一种（或者非常有限的几种，而且还得从原理上而不仅仅是技术上就不能再分）基本结构可以构成所有的物质，我们总是可以不断地这样分下去。

注意，每一次这样的分解，实际上，我们都会转移我们对上一级结构关注，而把关注点先放到分解出来的子结构。当然，如果我们每一次都能搞清楚分解出来的子结构之间的相互作用，那么，实际上，我们的信息仍然是完整的。也就是说，在我们需要回到上一级结构的时候，我们仍然具有得到上一级的结构的属性和行为的所有的信息。在实际研究中，我们也往往是因为对上一级结构的属性和行为的关注才走到下一级结构的。因此，把上一级结构所包含的所分解出来的每一个下一级结构研究清楚以后，再一次回到对上一级结构的理解上去，也是很自然的任务。这就是综合。

但是，我们将来会发现，综合的这一步，并不是那么简单。可能这一步的计算分析比较难，因为除了各个下一级结构还有这些结构之间的相互作用。第二，上一级结构的属性和行为和下一级结构的属性和行为之间可能会超越简单的加总的关系——当然者也很好理解，只要相互作用对上一级结构的影响不可忽略，其整体行为就可能和每一个下一级结构或者其加总不同。前者被称为相互作用系统的计算问题，后者被称为涌现性。因此，综合往往不是平庸的一步。

[15]别问我具体数值。

2.3 从亚里士多德看到物理学的典型研究对象

大约再最早的时候，连哲学和数学都是不分家的，一切需要用到智慧的被称为哲学。“Philosophy”这个词来自于希腊语，其词源上由两个希腊语单词“philia”（“爱”）和“sophia”（“智慧”）构成，合起来就是“爱智慧”的意思[16]。也就是说，只要开始思考，开始问问题，就算哲学的缘起。当然，具体考证哲学在哪里从什么时候开始的，就不是本书的主题了。不过，从现代科学的角度，我们继承和发展的主要是来自于古希腊的哲学。因此，我们就直接从古希腊开始。在Aristotle（亚里士多德）之前，大约哲学和数学已经初步分开了，尽管那时候仍然很多数学家也同时是哲学家，例如Plato（柏拉图）和Pythagoras（毕达哥拉斯）。按照Plato的说法，大概来说，数学就是完全关心理念世界的，永恒的。当然，现在我们知道其实数学的发展也往往受到现实世界的启发，尽管确实不屑于接受现实世界的约束和检验。哲学呢，那时候，就是爱智慧之中除了数学的部分。原则上既可以是价值观的部分，例如人活着是为了什么，人是否应该有信仰，也可以是和现实相关的部分，例如我们的世界和我们这些人从哪里来，最终去向哪里，等等。

这个时候，Aristotle出手了 [9]，把哲学分为第一哲学——“形而上学（metaphysics）”和第二哲学——自然哲学（natural philosophy），或者说接近我们今天说的物理学的那个学科。那两者的区别在哪里呢？形而上学我不懂，大概是超越经验世界的意思。那至于经验世界又是什么，我就更加不懂了。自然哲学，用今天的语言来说并且只说其中我能够看懂的部分，就是那些关于运动和变化的学问[17]。换成今天对哲学和物理学的理解，重新来“阐述或者表述”——其实是“歪曲”——Aristotle的意思，那大概可以说，第二哲学是关于可测量的对象的研究，而第一哲学是关于不可直接测量但是仍然和可直接测量的对象有关的对象的研究。于是，我们就清楚地知道了物理学的研究对象：一切可测量的东西。当然，那个时候，其实测量手段有限，是不是除了长度（以及基于长度的面积、体积）和重量之外就没什么可测量的东西了。时间大概也是可粗糙测量的。于是，物理学也就主要研究这些对象了。因此，物理学的典型研究对象就基本明确了。这是非常重要的

[16]见例如https://www.worldhistory.org/philosophy/。

[17]Aristotle用的是质料、形式、目的和动力来描述事物的运动。这些我都看不懂。请大家允许我偷懒，仅仅转达那些我凑合着能够看懂的东西。

一步。有了研究对象，只要我们提出问题，找到研究方法来回答问题，就可以发展出来一个学科的概念体系了。因此，把物理学从哲学中独立出来是物理学发展中非常重要的一步。尤其是考虑到前人，例如Zeno对运动的存在性和描述的可能性的挑战。

Zeno有多个佯谬来论述运动的不可能性和对运动的描述的不可能性。这些问题直到近代数学发展出来以后，才得到解决。因此，这些问题可不是没有意义的，也不是容易被对付的。其中，“阿基里斯（Achilles）和乌龟”的佯谬大概意思是这样的：假设古希腊的神之一Achilles（阿基里斯）sort的速度是乌龟的两倍，速度为 1 米每秒的乌龟的出发点在阿基里斯前面一米处，我们可以证明，Achilles永远追不上乌龟。论证过程是这样的：当Achilles到达乌龟前一个时刻的点的时候，乌龟往前走了一半的距离。第一次，那就是乌龟在Achilles前面半米的地方。接着，第二次，那就是乌龟在Achilles前面四分之一米的地方。一般形式就是，第 n 次的时候，乌龟在Achilles前面 $\frac{1}{2^n}$ 米的地方。也就是说，不管多少次，n 等于多少，乌龟都在Achilles前面。

我们当然知道这个结果是错的，我们能算出来多久Achilles可以追上乌龟，

$$v_A t - v_T t = L, \tag{2.3}$$

也就是，

$$2t - t = 1, \tag{2.4}$$

于是 $t = 1$ 秒。我们也知道如果做实验，Achilles就是可以追上和超过乌龟。那我们之前的论证哪里错了呢？

我们今天有了极限和序列求和的数学知识，当然，就可以求出来，

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1. \tag{2.5}$$

答案相同。同时，Achilles和乌龟之间的距离在追上之前，满足下面的一般表达式，

$$x_n = \frac{1}{2^n}, \tag{2.6}$$

而这个序列的极限等于零

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0. \tag{2.7}$$

但是，Aristotle那时候可没有这些数学知识啊。

Zeno的另一个佯谬是“飞矢不动”。这个“飞着的箭是不动的”的结论怎么来论证的呢？我们都知道“飞”就是运动的意思啊，怎么可能是不动的呢？你看，我们选择一个时间点，在这个时间点上，箭没有产生任何移动的距离（$\Delta x = 0$），尽管可能箭在运动。好了，速度，是这样计算的：一段时间 Δt 之内的运动距离除以时间（$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$）。但是，你看，分子都是零了，那分数肯定为零（在不考虑还不会算或者不允许算的 $\frac{0}{0}$ 的条件下）。于是，飞着的箭的速度为零，也就是它不在动。

我们今天，有了极限和导数的知识，当然知道，$\frac{0}{0}$ 是可以计算的，就看分子和分母接近零的速度，也就是去比较不同的无穷小，于是，我们知道，如果箭是在作匀速运动，那么，对于任何的 Δt 都有 $\Delta x = v_0 \Delta t$，于是，

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0. \tag{2.8}$$

但是，Aristotle那时候可没有这些数学知识啊。顺便，我们也看出来了，我们思考的过程需要借助数学的语言来表达。再次强调，看到数学是思维的语言，这一点对于科学家和数学家非常非常地重要。

因此，千万不要小看Aristotle那时候提出来物理学要研究事物的运动这件事情，以及需要研究自然这个形而下的可测量的对象。那具体来说，Aristotle有提出过哪些物理学的知识，他大概是如何提出的呢？

比如说，Aristotle说，天体围绕地球做圆周运动。这个结论可能受到了Plato的启发和限制。Plato认为圆形是最完美的图形，天体肯定是沿着最完美的形式来运动的。Aristotle也可能受到了生活经验的启发。因为我们人是站在地球上的，在粗糙的肉眼观测下，我们确实就会认为其他天体是围绕我们运动的。就好像我们坐火车，一不小心，我们就可以把周围的事物看作是运动的，而不是我们的火车。当然，这个物理学知识后来就被日心说所取代了。我们以后会回到这个问题。

比如说，Aristotle说，重的东西下落更快。这个也可能是受到生活经验的启发：你看下落的羽毛和铁球就是铁球下落的更快，而且一般情况下，看到的铁球就是比羽毛更重。当然，如果来系统性地做一下实验，其实，Aristotle就不一定会这样认为了——我们可以找一片或者做一片非常重的羽毛，然后找一个非常轻的铁球，这个时候肯定还是铁球下落更快，但是它更轻。这个就是未来家Galileo突破的点。我们也稍后回到这个问题。

比如说，Aristotle说，力是维持运动的原因。这个也可能是受到生活经验的启发：你看你推动一个桌子，只要你不再推，桌子就停下来，如果你要维持桌子的运动，你必须一直推着。当然，如果来系统性地做一下实验，其实，Aristotle就不一定会这样认为了——你可以把Aristotle放到冰面上，推他一下给他一个初始速度以后就不要碰他，不给他任何来自于你的力，你会发现，他一时之间停不下来，但是按照他的理解这个时候他不受力。反而，它会发现，这个时候，需要想办法施加一个力才能停下来。这个也是未来Galileo突破的点。我们也稍后回到这个问题。

不过，在Aristotle的时代，自由落体这样的运动被认为是物体的某种本性导致的，而不是今天我们的认知——由重力的作用导致的。因此，Aristotle以及其学派的其他人所作的接近“力是维持运动的原因”的含义和我们今天所批判的“力是维持运动的原因”其实不一样，尽管也有联系。在这里，我们不再去阐述这个联系和区别。后面我们会看到，Galileo明确通过实验加上推理来反驳了“重的东西下落更快”以及建立了“不受力会一直运动下去”，就差一点就可以到“力是改变速度的原因了”。

那Aristotle的这些错误的物理知识，表示其物理学的研究对象和研究方法出问题了吗，还是数学工具不够，或者没逻辑呢？都不是的。其实，Aristotle的研究方法就是从生活中做提炼总结，受生活经验的启发。这是很好的物理学的研究方法，主要问题是当时测量手段的限制和观测的系统性的限制——如果Aristotle生活的地方经常能滑冰那肯定会不一样。让物理学的知识尽量符合观测到的现象这个目标，是没问题的。实际上，Galileo自己在《关于两大世界体系的对话》[10] 一书中这样说：

> 难道怀疑如果亚里士多德看到天空中的这些新发现，他不会改变自己的观点，修改自己的著作，拥抱最理智的学说，并抛弃那些弱智到只会悲哀地墨守他说过的每一句话的人吗？

那是不是Aristotle逻辑有问题？还真的不是。演绎逻辑的核心——三段论，就是Aristotle明确表述出来的。也就是，任何一个论证要从大前提出发，检查小前提是否满足大前提的要求，如果满足就可以得到结论。例如，如果我们已经知道任意的直角三角形三边都满足直角边的平方和等于斜边的平方（$a^2+b^2=c^2$），那么，一个具体的直角三角形，例如直角边是 3 米和 4 米，都满足这个关系，于是斜边的长度就是“$\sqrt{3^2+4^2}=5$”。例如，从大

前提“任何人都是要死的”，小前提“Socrates（苏格拉底）是一个人”，就可以得到“Socrates是要死的”。至于大前提和小前提自己是否成立，逻辑学是不管的。这样，我们就把论证过程和检验完全分开了。你可以对大前提，小前提做检验，甚至也可以对结论做检验，但是，三段论保证了只要大前提和小前提正确，并且小前提满足大前提的要求，结论必然成立。这样，我们就一定程度上可以直接由逻辑论证来构建知识体系了，检验单独来做。这其实就是整个数学的核心思想之一。同时，物理学呢，那就是未来运用数学来做这样的纯逻辑的构建，同时做实验来检验其大小前提就可以，尽管实际上我们往往也检验结论。这很大程度上是因为我们物理学家在使用数学的过程中会引入大量基于直觉——当然也是训练以后的直觉而不是生活直觉——的近似，尤其当物理学现象背后的数学问题难以精确求解的时候。

因此，Aristotle基本上确立了物理学的典型研究对象，也有了初步的研究方法——受现实的启发从现实中做抽象，甚至还初步有了依靠逻辑（也就是数学）来推理，物理学知识要和观测到的现实相符。但是，受生活经验所限，加上没有系统性地做观察，更加没有系统性地做实验来测量，也没有足够的数学知识来描述现实，其具体的物理学知识都不太正确。而这些都是在Aristotle之后被一代代科学家和数学家创造出来的。

2.4 从伽利略看到做实验做测量

> *Measure what is measurable, and make measurable what is not so.*
> 测量能测量的，使得不能测量的能测量。
>
> – Galileo Galilei

那Aristotle所缺乏的系统性地开展测量和实验这个科学研究方法，就得等到Galileo来确立了。前面已经提到，Aristotle的“力是维持运动的原因”具体物理知识是错的。从滑冰等生活经验上，我们就可以判断“没有力仍然可以有运动”。实际上，Galileo注意到了另一个生活经验——从斜面上滑下来的小球在很长时间内仍然有运动。然后，开展了实验和测量，以及推理或者说理想实验。

在Galileo之前，时间的测量应该还不能在秒的量级来完成。Galileo注意

到，依靠单摆的周期运动并且这个周期还可振幅没有关系于是可以很稳定，可以来测量秒级别的时间。有了时间的测量方法，结合早就有的距离的测量方法，我们终于可以来研究运动了。

我们回到Galileo的时代，来面对是否“重的东西下落更快”以及“力是维持运动的原因”。关于“重的东西下落更快”，Galileo有一个看起来似乎是纯逻辑的不依赖于任何事实的思辨，或者说理想实验。他是这样设计的[11]：让一个重物 M 和一个轻物 m 绑起来，构成一个新的重物 Mm。按照新的重量加起来的法则，Mm 的重量最大。于是，按照“重的东西下落更快”它具有比 M 和 m 更大的速度。现在，我们假设这两个物体是通过某种质量忽略不计的胶水或者绳子连起来构成的。我们分开来看这两个物体。M 下落更快，m 更慢，于是，M 会拉动 m 使得其下落更快，m 会拖着 M 的后腿使得其速度更慢，整体来说 Mm 的下落速度肯定介于两者之间。但是，前面我们已经得到了 Mm 下落最快的结论。自相矛盾。于是，如果逻辑论证过程没错，则原始的假设错了，因此，“重的东西下落更快”它错了。

当然，这里还有一个技术上的小问题，我们是否可以找到这样的胶水或者绳子可以把两个物体的相互影响相互传递，但是自身重量忽略不计。不过，我们总是做得到使得这个胶水或者绳子的重量远远小于 M 和 m，于是不影响上面的论证。

那上面这个看起来似乎是纯逻辑的论证真的就反驳了“重的东西下落更快”这个结论了吗？如果可以，那么，实际上，我可以反驳任何类似的命题，例如“重的金子总价值更高”，“高个子体重更大”。你看，我说，把两块重量分别为 M 和 m 的金子绑在一起成为一块更重的金子 Mm。如果“重的金子总价值更高”正确，则 Mm 最值钱。但是，回到分开两块来看，值钱的 M 会带动 m 使得其更值钱，不值钱的 m 会拖着 M 的后腿使得其更加不值钱。因此，值钱程度肯定在两者之间。自相矛盾。当然，我们知道后面的结论“重的金子总价值更高”在现实中往往是正确的。那问题在哪里呢？为什么我们照着同样的理由，可以被认为反驳了“重的东西下落更快”，但是，不应该被认为反驳了“重的金子总价值更高”呢？

这背后的概念其实是强度量和累积量。对于强度量，往往有前面速度那样的，快的带动慢的，慢的拖着快的后腿，如果用数学公式来表达，大概

图 2.2: Galileo斜面实验的装置：斜面起点是一个单摆，斜面的每一个奇数单位长度的地方放置了一个可以被滚下来的小球轻轻撞击就敲响的钟。图片来自于伽利略博物馆，网址为https://catalogue.museogalileo.it/object/InclinedPlane.html。

有

$$v_T = \frac{Mv_M + mv_m}{M + m}, \tag{2.9}$$

而累积量却没有这个性质，反而遵循

$$V_T = V_M + V_m = Mp_M + mp_m. \tag{2.10}$$

其中，经常 p_M 是一个常数，表示例如金子的单位价格。这就能看出来，为什么速度一个强度量，肯定介于各自物体的快慢速度两者之间，但是总价一个累积量，肯定等于两者的总价相加。

也就是说，Galileo的思辨，基于了"速度是一个强度量"这个事实。问题是，这个事实又是从哪里来的呢？可能是从生活经验。因此，Galileo的看起来纯逻辑的批判实际上用了来自于现实生活经验的事实性知识。顺便，物理学永远是依赖于经验和体验的，而不是纯逻辑的。

实际上，对于重物下落更快，Galileo是如何反驳的呢？靠实验。大家都听说过的比萨斜塔的实验据考证不一定真实发生过。但是，类似于图 2.2 中的斜面实验，大家相信是真的发生过的。

在Galileo斜面实验中，起点处有一个单摆，然后每逢奇数的地方都有一个小钟。一个小球从起点处被释放，开始滚下来，每次撞到小钟都会发出声音。我们要把不同重量不同质地的小球拿来做这个实验，发现：对于单个小球，每次撞到钟的时间间隔相同；对于不同重量的小球，这个时间间隔也相同，不依赖于具体小球的重量。

如何来测量这个时间间隔呢？我们可以通过调整单摆的绳子长度来调整其周期，使得其振动的周期（或者周期的若干倍）正好就是小球总释放到第一个钟的时间间隔。为什么保证了这个，就可以观察到后面的时间间隔都相同，以及这个时间间隔还不依赖于小球重量呢？根据我们今天掌握的力学知识，我们知道所有小球的加速度相同，因此，每一个单位时间内速度的变化相同 $v = gt$，位移（从起点开始移动的总距离）为 $x = \frac{1}{2}gt^2$。按照奇数个单位长度间隔的钟的位置的设定，$x_0 = 0 = 0^2$，$x_1 = 0 + 1 = 1 = 1^2$，$x_2 = 1 + 3 = 4 = 2^2$，$x_3 = 4 + 5 = 9 = 3^2$，刚好就和 $x = \frac{1}{2}gt^2$ 相符。也就是说，刚好背后对应着的时间间隔相同。同时，$x = \frac{1}{2}gt^2$ 是根据Newton 运动定律$F = ma$ 和质量和重力的关系 $F = mg$ 得到的，

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg}{m} = g. \tag{2.11}$$

因此，对于初始速度和初始位置为零的情况，$v = gt$ 和 $x = \frac{1}{2}gt^2$，并且这个结果不依赖于物体的质量 m。

于是，图 2.2 中的斜面实验就可以展示单摆每次摆动固定的若干次，就会听到一声钟声的现象，反之亦然。

用测量的方法来研究物理对象，用比较简单的数学计算来辅助推理，从而研究和解释物理现象，这是Galileo对物理学的贡献。

实际上，这个实验也可以反过来做，从实验现象发现位移和速度公式，发现加速度相同，然后，问什么样的物理模型可以得到加速度相同。我们来利用今天的手机或者相机来设计一个这样的实验。我们把手机或者相机调整为固定的拍摄间隔，例如 0.1 秒左右。也就是相机每秒钟拍摄 10 张左右的照片。买一把皮尺，长度大约一米五、两米。把皮尺固定在一个白色或者黑色的墙上。用若干个对比色明显的小球，从皮尺的起点（实际上，固定位置就可以）开始释放小球，拍摄照片。观察每张照片上小球的位置，记录下来，计算相邻两次的位置差，再计算相邻两个位置差的差。会发现，这个差基本上是一个常数。这个常数意味着什么呢？意味着加速度相同。

图 2.3: 自由落体实验。我们用相机、皮尺和小球完成了自由落体实验，记录数据，并且得到平均加速度的值。拍摄实验现象图和数据处理图。

首先，相邻两次的位置差就代表了这一段时间间隔内的平均速度，因为每一段的时间间隔都相同的（$\bar{v}_n = \frac{x_{n+1}-x_n}{\Delta t}$）。接着，相邻两次的速度差，也就是位置差的差，就代表了这一段时间间隔内的平均加速度，$\bar{a}_n = \frac{v_{n+1}-v_n}{\Delta t}$。图 2.3 就是实验结果和数据处理结果的照片。我们发现，确实，加速度几乎是一个常数。那按照科学研究方法，下一步，就是构建概念模型和数学模型来解释这个加速度几乎为常数的实验现象。

有了斜面这个实验装置，对“力是维持运动的原因”的突破就是相对简单的事情了。我们今天知道，只要做一个从斜面上滑下来的小球在不同粗糙程度的平面上运动的实验，就可以发现，平面越光滑则小球在到达平面以后运动的距离越远。第一，这个运动，不受额外的推力的作用，但是会维持很长时间，因此就否定了“力是维持运动的原因”。不过，这个实验牵涉到Aristotle和Galileo的含混不清力的概念的问题，应该是没有被Galileo真的做过的。至少在《关于两门新科学的对话》[11] 中没有这个明确的记录。第二，我们可以进一步猜测，如果平面可以无限光滑，没有摩擦力，那么，可能这个运动会一直持续下去。实际上，这个第二点，Galileo可能是做了实验的，或者至少是做了理想实验的 [11]。Galileo让一个斜面接上一个不同角度的斜面，图 2.4，说如果没有摩擦力，可以推断，其在小球在更平的斜面上的运动的距离更远——对于角度更小的直角三角形要达到相同的高度需要

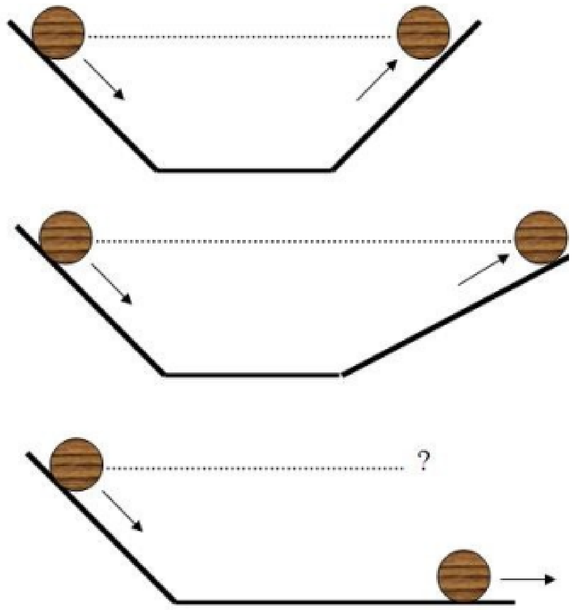

图 2.4: Galileo斜面实验看运动距离。Galileo把不同角度的斜面接起来，假设没有摩擦，来推断在完全水平的表面上运动的距离。图重新做。

更长的斜边。因此，如果这个角度完全为零，则肯定需要运动到无穷远处。当然，如果回到有摩擦力的情形，我们原则上就可以来完成前面的不同光滑程度也就是具有不同摩擦力的实验来否定“力是维持运动的原因”以及推断无限光滑会使得小球一直运动下去。

我们看到，Aristotle和Galileo都注意从生活经验中提炼问题和答案，但是在Galileo这里，最大的变化就是要对生活经验做测量，开展实验研究，以及基于实验数据来开展计算和思考。

不过，真正发挥实验数据的价值，还得靠进一步的数学计算和分析，以及数学建模。这就得看Johannes Kepler（约翰内斯 · 开普勒）和Newton的了。注意，并不是Galileo不用数学建模，或者说用数学的结构以及逻辑推理和计算来描述现实，仅仅是因为当时处理更加复杂的运动的具体数学知识具体数学结构还没有准备好。实际上，Galileo的整本《关于两门新科学的对话》[11] 都是借鉴Euclid的《几何原本》[12] 的定义公理定理证明的方式来写成的。数学是思维的语言，人类用思维来认识世界，基于对世界做的观察

和实验。因此，用数学来描述世界是自然的。

2.5 从第谷和开普勒看到对精细测量结果的追求和重视

根据来自于Plato的“圆形是最完美的图形”的理念，以及我们观测者自己处于地球上的限制，还有后来和宗教的结合，在A 尼古拉 · 哥白尼（Nicolaus Copernicus）之前大家普遍相信Claudius Ptolemy（克罗狄斯 · 托勒密）完善起来的地心说。地心说大概的意思是：地球位于宇宙中心静止不动；每个行星都在一个称为“本轮”的小圆形轨道上匀速转动，有必要的时候可以引入“本本轮”——一个圆心沿着“本轮”运动的更小的圆形轨道，本轮中心在称为“均轮”的更大的圆形轨道上绕地球匀速转动（但是地球不是在均轮的圆心）。合起来，也就是用大圆形的轨道，套上小圆形的轨道，再套上小小圆形的轨道，必要的时候可以继续套，来描述天体围绕地球的运动。

那为什么会这么复杂引入这么多大圆小圆呢？因为如果完全按照围绕地球的圆形轨道来解释观测到的天体的运动，经常会发现天体的逆行。引入下一级级别的圆可以很好地解释这个逆行。未来我们会用Fourier 级数来解释这个大圆套小圆的描述方式。那时候，我们会发现，只要允许我们不断地增加小小小小轮，地心说实际上总是可以无限接近观测结果的。这也就解释为什么地心说可以很好地描述观测到的天体运动。实际上，如果抛开宗教对地心说的维护，进而对其他学说的压迫，对传播其他学说的人的迫害，地心说本身完全是科学的：其希望构建一个可以描述观测现象的模型，而且越准确越好。唯一的问题是，有可能太复杂了，为了坚持用圆形这个最完美的图形，为了坚持把地球放在中心（其实不是正中心）。

那么，Copernicus的日心说又包含什么内容呢？首先，太阳是宇宙的中心，其他天体围绕太阳做圆周运动。其次，为了解释所观测到的天体运行现象，同样需要引入均轮、本轮、本本轮。甚至，为了达到和地心说同样的解释观测现象上的准确程度，所需要的轮子也有三十来个。尽管所需要的轮子数量比地心说的七八十个少很多，但是，仍然很复杂。当然，我们今天也知道，后来新的观测证据——恒星岁差和金星盈缺——和模型发展——

从圆形轨道的日心说变成了椭圆形轨道的日心说——证明了，确实日心说更加接近现在的模型。在当时，Copernicus并没有这些后来才观测到的新数据。不过，Copernicus的日心说很大程度上挑战了教会，促进了“让科学的事情归科学”。

Tycho Brahe（第谷 · 布拉赫）是不满足于地心说的复杂程度，也不相信Copernicus的日心说的。于是，第谷决定自己来做更加准确的观测，从而检验到底哪一个模型对，或者自己来构建一个更好的。Tycho建立了天文观测台，并且在这座天文台观察了 21 年。实际上，由于日心说预测的恒星岁差一直没有被Tycho观测到，Tycho构建了他自己的天体运行模型：让太阳和月亮继续围绕地球运动，让其他五大行星围绕太阳运行。不过，Tycho的贡献在于积累了大量的观测数据以及找到了最合适的来分析这些数据的人Kepler，而不是其自己提出的理论。

Kepler获得这些数据以后，想用现有的模型去解释这些观测数据。发现，无论用什么方式，Tycho观测数据和模型的计算结果总是不完全相符。例如，按照Copernicus的日心说做计算，和实际观测数据有 $8'$ 的误差 [13]。这个误差已经很小很小，相当于一个圆周角的 $\frac{8}{360\times60}=\frac{1}{2700}$。但是，Kepler相信，按照对Tycho观测数据的分析，其观测误差应该远远小于 $8'$。于是，根据计算过程中遇到的问题，例如地球的轨道看起来不是一个圆，如果看作圆太阳也不在这个圆的正中心，Kepler作出了重要的跨越——轨道可能不是圆而是椭圆。其背后的理念是：数据最重要，模型是为了解释数据的，模型主要受数据启发而不是哲学或者美学或者宗教的限制。

科学是数据驱动的，数据是第一位的，模型是第二位的，哲学美学等方面的考虑不是模型应该受到的限制。经过Tycho和Kepler的努力，这一条就被确立起来了。实际上，Francis Bacon（弗兰西斯 · 培根）的经验主义和这一条有相同的内核：一切科学知识最开始的启发来自于观测，必须是观测。

顺便，Kepler的工作也展示了数学计算在科学研究中的重要意义：正是通过基于不同模型的数学计算，我们才能得到更加接近观测数据的模型。如果这个模型也是受现实启发被提出来的，则这个过程被称为数学建模。

2.6 对比实验在科学中的独特地位

对比实验或者说控制实验的意思，就是有若干个相互之间仅仅相差一个变量的取值不同的实验放到一起来开展，然后来看这个变量会造成什么样的结果。例如，最简单的是两组实验，实验组和对照组。例如，实验组吃某种药物来治疗某种疾病，对照组吃安慰剂——也就是没有那种药物成分但是看起来很像的假药来假装着治疗这种疾病。然后，尽量保证这参与两组实验的被试在其他方面没有什么不同，例如年龄构成、性别构成、疾病的病程等等。实际上，之所以要吃安慰剂而不是直接不吃药也是为了使得两组之间差别更小。因为医学研究发现，心理暗示作用可能不可忽略，因此，得让两组被试以及两组被试的主试都主观上不可区分到底吃的是真药还是安慰剂。当然，更一般的情况也可以就一个变量的多种取值情况来做多组对照实验。

对照实验的背后的概念是因果性。我们先从逻辑上来讨论一下，为什么需要对照实验，以及对照实验结果有了如何去判断因果性。

2.6.1 从对比实验判断因果性的标准

我们先针对只有两个值的变量——存在和不存在两个状态——来讨论。比如，我们观测到 $C=1$ 表示“C 存在”的时候总是有 $E=1$ 表示“E 存在”，我们可以说 C 导致 E 吗？为了简单，我们也先不管概率的问题，假设“$C=1\Rightarrow E=1$”这个关联百分之百发生。例如，假设我们看到每一次打闪电了就能听到打雷——注意这个假设本身不一定事实上就成立啊，我们就可以说，打雷是打闪电的原因吗，或者打闪电是打雷的原因吗？不能。很可能事实上，它们都是由某一个共同的原因导致的，它们之间完全没有关系。那么，我们在什么观测结果下，可以建立因果关系呢？

例如，如果我们除了“$C=1\Rightarrow E=1$”还观察到“$C=0\Rightarrow E=0$”呢，是否我们可以得到说“C 就是 E 出现的原因”呢？还是说这个要求不够，还是过了？为什么会怀疑这个条件不够呢？回到打闪电和打雷的例子，如果我们每次看到闪电就听到雷声，看不到闪电就听不到雷声，我们能够认为打闪电是打雷的原因吗？你看，这仍然不能否定之前的那个闪电和雷声两者由共同原因导致的反例。那又为什么说可能过了呢？按照演绎逻辑，

原命题和逆否命题（把原名题的条件和结论的顺序倒逆过来，同时把条件和结论各自都取反面）完全等价，则 $C=1\Rightarrow E=1 \Longrightarrow E=0\Rightarrow C=0$，$C=0\Rightarrow E=0 \Longrightarrow E=1\Rightarrow C=1$。于是，如果这个要求下“C 就是 E 出现的原因”，那么，我们也可以得到“E 就是 C 出现的原因”。两者完全等价。我们明明只希望找到“C 就是 E 出现的原因”的条件而已，而不是“C 和 E 完全等价”的条件。那看起来，这个要求既不够，又过了。这就麻烦了。回到打闪电和打雷的例子。“看到闪电就听到雷声”意味着“听不到雷声的时候肯定看不到闪电”，“看不到闪电就听不到雷声”意味着“听到雷声的时候肯定看到闪电”。合起来，如果这个条件就是因果性条件，那么就有了，闪电就是雷声的原因，雷声也是闪电的原因。但是，仍然，我们不能否定闪电和雷声之间没有因果关系，仅仅是同一个原因的两个每次都一起出现的结果。

但是，回到吃药的例子，假设吃了真药病好了，没吃真药病没有好，那我们是不是可以宣称，吃这个药是病好了的原因呢？好像还真的可以。那判断因果性的一般标准到底是什么呢？John Stuart Mill（约翰 · 斯图尔特 · 密尔）在 1843 年出版的《逻辑体系》[14] 一书中就第一次系统性地讨论了这个标准 [15]。其条件可以总结为：“$C=1\Rightarrow E=1$”，“$C=0\Rightarrow E=0$”，并且 C 可以独立变化，也就是实验者可以直接去改变 C，而不需要先去改变其他变量从而来改变 C。例如，吃某种药是一个可以直接改变的，给真药就是吃，给安慰剂就是不吃。反过来，病是否变好不是一个可以直接改变的量。不能说，主试说，“病人啊请你把病变好”，就能直接变好的[18]。同时，物理学家还给因果性加上了一条——时间上有先后顺序，认为结果不会出现在原因之前。

我们来用这个增加了“独立变化、时间顺序”之后的判断原则是不是就可以解决前面的问题。我们先来看闪电和雷声的问题。根据物理学知识，我们知道答案：它们都是同一个原因“累积了不同性质的电荷的云层放电”导致的，因此不能称为因果联系。我们来从因果性判断一下。首先，我们已经

[18] 就算是自限性疾病也往往是身体的免疫系统的激活导致这个病看起来“自然地”变好的。

假设了[19]两者一直会同时发生，也就是“$C = 1 \Rightarrow E = 1$”，“$C = 0 \Rightarrow E = 0$”肯定满足。于是，如果不要求 C 可以独立变化，则我们就可以认为打闪电是打雷的原因。甚至，打雷也是打闪电的原因。如果我们有了独立变化的要求，则因为无论打雷还是闪电都不能控制其独立发生或者不发生，打闪电是打雷之间就不存在因果关系了。另外，时间上，尽管我们可能先看到闪电，但是如果考虑了光和声音的传播之后，会发现，两者没有先后关系，同时发出的。因此，这也就否定了因果关系。

回到吃药的例子，假设吃了真药病好了，没吃真药病没有好，吃药与否可以独立变化，病好没好不能独立调整，而且吃药发生在病好之前[20]，因此，根据前面的标准，可以认为吃真药是病好了的原因。

不过，这里的要求是一个充分条件，不见得是必要的。也就是说，有可能在不满足这几条的情况下仍然是因果关系。其中一个例子顺序因果关系链中的直接因果关系是否算因果关系。例如，我们假设“吃多了就是会胖不吃多就是不会变胖，胖了就是会得糖尿病不胖就是不会得”。时间顺序也遵从，也就是先吃多与否，再变胖与否，最后得病与否。那么，按照“独立变化”的要求，变胖就不是得病的原因，因为变胖与否不能独立变化，必须先去调整其原因，也就是多吃或者少吃。但是，按照前面的假设，我们从直觉上，变胖就是得病的直接原因，多吃是得病的根因。看起来，“$C = 1 \Rightarrow E = 1$”，“$C = 0 \Rightarrow E = 0$”、“C 独立变化”和“时间上 C 发生在 E 之前”，这个合起来的条件偏严了。不过，这个问题，可以通过语言使用来解决：约定我们一般说的因果关系就是“根因”，“最终原因”，就行。一旦我们要建立完整的因果链条，则我们就明确用“直接原因”来表示，而不是用模糊的“原因”。当然，如何找到直接原因的充分必要的条件还是一个问题。例如，是不是“$C = 1 \Rightarrow E = 1$”，“$C = 0 \Rightarrow E = 0$”和“时间上 C 发生在 E 之前”[21]就可以？从一个小半吊子逻辑学家的角度，我这个物理学家认为这个条件可以。不过，具体是否真的可以，就留给真正的逻辑学家去检验了。

---

[19]实际上是否如何，我们不关心。不过，如果云层放电必然导致打闪电和打雷，则这个假设很合理。就算不符合，找一个一个原因必然导致两个结果的真实出现的现象也很简单。

[20]在自限性发挥作用之前或者自限性不足以发挥作用的条件下，同时也没有吃其他可以把疾病治好的药

[21]这里的发生的时间不是观测到的时间，而是把观测到的现象反推回去得到的发生时间。例如，前面的打雷和闪电的例子。

更进一步，为什么我们需要走到因果关系呢？第一，因为我们从实用的角度想干预这个世界。如果能够找到某个结果就是某个原因导致的，那么，我们只需要去改变这个原因，就可以干预相应的结果是否出现。第二，可能是因为我们人类的好奇心。我们不满足于表面的联系，而是更喜欢看到内在的联系。

小结一下：通过开展单一变量 C 的不同取值的对比试验的研究，来看是否出现结果 E，我们可以作出变量 C 和变量 E 之间是否存在因果性的判断，其中一个判断具有因果性的原则就是“$C=1\Rightarrow E=1$”，“$C=0\Rightarrow E=0$”、“C 独立变化”和“时间上 C 发生在 E 之前”，或者，“$C=1\Rightarrow E=1$”，“$C=0\Rightarrow E=0$”和“时间上 C 发生在 E 之前”。这个判断标准实际上也指导了对比实验的设计。

2.6.2 对比实验案例

历史上，当然是先有对比实验或者接近对比实验的例子，然后，才总结出来这个对比实验的判断标准的。具体到底谁第一个开展的对比实验，不好说。但是，其思想大概在Galileo对“力是维持运动的原因”的实验检验中就有了。Galileo在保持其他条件都相同——同样高度滑下来、同样的斜面、同样的下滑小球的情况下，改变滑下来以后的桌子平面的光滑程度，来看到底能够滑多远。发现，随着光滑程度的提升，滑行距离越来越远。于是，忽略其他条件的前提下，光滑程度决定了滑行距离，光滑程度高导致滑行得远，光滑程度低导致滑行的近。并且，更进一步，从当时已经知道的受力来看，无论哪种情况，在小球到水平面之后都没有一个主动力在推动这个小球，因此，如果“力是维持运动的原因”正确，则小球应该到平面以后就停止。这个不停止说明，要么有其他力在维持小球的运动，要么“力是维持运动的原因”是错的，而且这个维持的力还和桌子平面的光滑程度有关。

接着，从越光滑距离越远这个趋势来推断，有可能无限光滑的话，就一直不停止。无限光滑，不太可能意味着那个维持运动的力一直存在。按照生活体验，应该是越不光滑某个力越大，越光滑应该越不存在。于是，基本就可以得到“力是维持运动的原因”是错误的这个结论，以及推断（没有严格证明）当桌子平面无限光滑时，“物体不受力，保持原来的运动状态——指的是速度相同”。

因此，对比实验，也就是控制其他变量都相同仅仅考虑单一变量对结果的影响，在实验研究中是一个非常自然和常用的设计思想。

在医学实验中，大约詹姆斯 · 林德 (James Lind）是第一个有发表记录的正式实施对比实验的人。五月二十日是国际临床试验日，就来自于 1747 年 5 月 20 日，Lind做的人类历史上第一个医学对照实验 [16, 17]。在那个时代，坏血病是长期航海海员非常容易得的病。人们已经开始猜测，酸性的东西有助于降低坏血病得风险以及治疗坏血病。于是，Lind作为一个在航海舰队服务的医生，就像来检验一下这个猜想。林德给每组两人分别服用苹果酒、硫酸丹剂（Elixir Vitriol)、醋、海水、大蒜芥茉以及柑橘和柠檬。6 天后，柑桔和柠檬用完了，实验就停止了。其中，食用柑橘和柠檬组的 2 人逐渐康复回到工作岗位，而剩下只有喝苹果酒的病情略有改善 [16, 17]。但是，由于受当时认知的限制和启发，Lind就做出来酸性物质对坏血病有效的结论，而不能解释为什么硫酸也是酸性的但是无效，也错过了我们今天知道的正确的结论——实际上是柑橘和柠檬中的维生素 C 是有效成分。实际上，从前面我们对对比实验的逻辑探讨可以看到，其实验结果并不能支持“酸性物质对坏血病有效”的结论。

为什么这么说？所有的酸性物质只要有（一定含量）都会改善坏血病吗？不是的，硫酸丹剂无效。所有的没有酸性物质的都不会改善坏血病吗？从仅有的实验组看起来是的，但是，没有看看其他的各种酸。独立变化和时间顺序的条件倒是满足的。因此，原则上，只要Lind去尝试更多的酸，就会发现，除了含有维生素 C 的酸之外，都无效，只要含有维生素 C 不管是否尝起来是酸的都有效。不过，当时，还没有Mill对对比实验的逻辑探讨。

历史上有很多的对比实验是设计非常巧妙的。我们来看其中的一个：Louis Pasteur（路易斯 · 巴斯德）和灭菌实验。

巴士德消毒法（pasteurization）是Pasteur为了保存葡萄酒发明出来的。其背后的原理是高温灭菌。其实，在那之前，已经由安东尼 · 菲利普斯 · 范 · 列文虎克（Antonie Philips van Leeuwenhoek）发现了细菌（例如变质的食物上有彩色霉点，放到显微镜下面能看到这些霉点的细部结构，这样的东西被称为细菌。其实还有可能是真菌），由民间以及其他人（见 wikipedia ”pasteurization” 词条）采用了加热密封罐的方法来保存食物。那 Pasteur 干了件什么事呢？他把消灭细菌和加热保存两件事情给联系了起来，用实

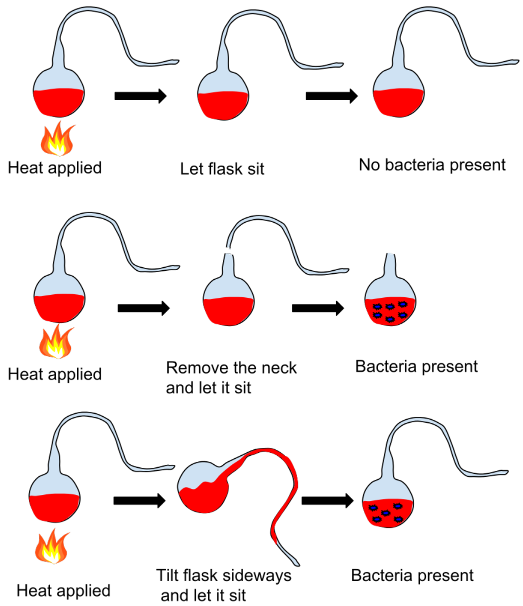

图 2.5: Pasteur灭菌实验。图片来自于 wikipedia “pasteurization” 词条。图片由 Kgerow16 制作，遵循 CC BY-SA 4.0 协议，网址为 https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=40506737。

验证明了：加热之所以能够帮助保存食物是因为加热过程减少了食物中的细菌，而食物变质是由于细菌，所以，一旦大部分细菌被加热过程消灭了，则食物就能够长时间保存了。

为了证明这个结论，Pasteur做了图 2.5 中的实验。这个实验的第一行，也就是第一步，证明了：在没有变坏的酒（实际上其用的是肉汤，我们这里不管这个细节）里面没有观察到（很多）细菌。至于用火烧一下，加加热，只不过就是前人已经知道的可以让酒长时间不变坏的一个办法。这个实验的第二行，也就是第二步，证明了：第一、变坏了的酒里面可以看到很多细菌。至于变没变坏，实际上，可以通过尝一下这个酒来确认。这两步合起来，细菌和“变坏”之间已经有了强关联性。甚至具有了初步的因果性：有（很多）细菌的时候是坏的，（几乎）没有细菌的时候是好的。但是，在这个实验中，两者基本没有时间上的先后关系，也没有说细菌是否存在是一个可以独立变化的因素。因此，不好得到因果性的联系。

注意，从第一步到第二步，一个很大的差别是鹅颈弯管的存在和去掉。

那这个说明了什么呢？鹅颈弯管存在的时候，液体不容易和细菌接触——细菌从鹅颈弯管的开口处需要爬到鹅颈弯管的最高处，然后才能接触到液面。在开口处需要爬到鹅颈弯管的最高处这个全程基本没有液体，细菌很难存活和扩散。于是，鹅颈弯管存在的时候，细菌是不容易接触到液面的。反过来，当鹅颈弯管被去掉的时候，细菌就更容易接触到液面了。因此，我们看到，如果我们接受这个额外的差别和这个差别的解释——细菌接触到液面的可能性的低和高，那么，确实时间上细菌接触到液面是先于酒变坏的。因此，有细菌和酒变坏就是一个因果关系了。能不能更加明确地说明，确实细菌接触到液面的可能性起到了决定性作用呢？

于是，Pasteur做了第三步，想办法让细菌更容易接触到液面——把鹅颈弯管侧过来，让细菌不用爬第一个情形下的高坡。实验结果是，真的酒就变坏了。顺便，这个实验还有一个附带的结论：加热可以使得酒在没有引入外界新的细菌的时候得到没有细菌的状态。当然，我们今天的巴士德消毒法实际上利用的仅仅是这个附带结论。如果我们要直接检验这个附带结论，我们实际上得设计另一个实验：先检查没有加热也不引入新的细菌的酒中有没有细菌，然后检查和前者条件相同的酒加热以后也不引入新的细菌的酒中有没有细菌。如果前者有，后者没有，并且显然加热与否可以独立变化，并且发生在有没有细菌之前，那么，加热就是导致没有细菌的原因了。

Pasteur实验第三步的巧妙之处还在于否定了不变坏的效果是由“瓶子带不带鹅颈弯管”造成的——就算带了尾巴还是可以变坏。侧过来的尾巴和去掉尾巴都可以变坏，但是正着的尾巴不会变坏。而这三者之间的区别细菌接触到液面的容易程度。第三个正好进一步验证了接触程度造成的影响，从而也就是对细菌造成酒变坏的再一次检验。

这种把一个而且只有一个东西变没了，再加回来，来体现这个东西的效果的对比实验的设计思路是非常聪明和具有普遍意义的思路。

2.7 从牛顿到数学建模和概念建模

在Newton之前，Galileo已经基本上否定了“力是维持运动的原因”而发现了“改变物体运动状态需要力”，那么，怎么来描述力，怎么来描述运动状态以及运动状态的改变呢？Galileo特别擅长用斜面来做实验以及用几

何学的具体知识还有几何学的演绎逻辑当作开展物理学研究的工具。但是，稍后我们会发现，为了描述运动状态和运动状态的改变，我们还需要点别的数学知识。Kepler呢已经发现了天体运动的规律——太阳系的天体围绕以太阳为焦点做椭圆轨道的运动，每一个单位时间内太阳和天体连线——远日点和焦点的连线称为长轴——扫过的面积相同，运动的周期和半长轴长度（长轴长度的一半）满足一个特定的关系 $\frac{T}{R^{\frac{3}{2}}}=$ 常数。这个常数对所有的太阳系的天体来说都相同。

于是，一个自然的问题就是和Galileo研究自由落体的时候一样，任何一个超越具体对象的现象——重物下落的时间和质量看起来没有关系，天体运动的周期和半长轴组合起来的函数不依赖于任何一个天体。另一个自然的问题就是是不是天上和地面上的物体的运动实际上遵循相同的规律呢？如果是，那么，我们一旦可以描述地面上物体的运动以及更准确地表达“改变物体运动状态需要力”，下一个问题就是“天体的运动状态在改变吗，它需要什么样的力呢?”

为了解决地面上运动变化问题的描述，Newton发明了微积分——他称之为流数。任何有跑步走路经验的人，都知道，瞬时速度是存在的，我们还可以控制这个速度。顺便，如果我们在跑步的时候想改变这个瞬时速度呢，还得多花或者少花点力气——尽管这里的力气不一定就是未来要定义的力。当然，瞬时位置和时间也是存在的，并且是可测量的。问题是，瞬时速度的具体概念是什么，如何测量呢？显然，物体的运动轨迹可以写成 $\vec{x}(t)$——每一个时间点 t 物体在某个位置 $\vec{x}$。如果是一维运动可以更简单地写成 $x(t)$。Zeno的“飞矢不动”佯谬已经注意到了，瞬时速度不能定义，需要用到一个 $\frac{0}{0}$ 的不被允许的分数。

一个东西显然直觉上存在而且可控，严格定义又在当时还没有，定义起来还有困难，那么，这个东西的定义就是一个很好研究问题。如果从平均速度出发，我们大概可以这样来定义瞬时速度：我们取一小段时间间隔 Δt，测量一下这段时间里面我们所感兴趣的物体的位置变化 $\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)$——称为位移，然后平均速度就是

$$\bar{v}_{t,\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}. \tag{2.12}$$

我们是不是可以取足够小的时间间隔 Δt，然后，说这个这一点段时间内的平均速度就非常非常接近这个时间段的开始或者结束的时候的瞬时速度呢？

当然，如果我们真的让这个 $\Delta t=0$，我们还是会遇到 $\frac{0}{0}$ 的问题。能不能巧妙地来处理一下这个希望 Δt 足够小，但是又避开直接等于零的问题呢？在具体例子上，这是做得到的。例如，如果我们是匀速直线运动 $x=vt$，则

$$\bar{v}_{t,\Delta t}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{v(t+\Delta t)-vt}{\Delta t}=v. \tag{2.13}$$

它根本就通过除法避开了 $\frac{0}{0}$ 的问题。

当然，我们今天知道，如果是一个匀加速运动 $x=\frac{1}{2}at^2$，则

$$\begin{aligned}\bar{v}_{t,\Delta t}= & \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=\frac{\frac{1}{2}a(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}at^2}{\Delta t}\\ = & \frac{at\Delta t+\frac{1}{2}\Delta t^2}{\Delta t}=at+\frac{1}{2}\Delta t.\end{aligned} \tag{2.14}$$

似乎我们也可以在计算上避免 $\frac{0}{0}$ 的问题，只要“先做除法，再让 Δt 等于零”。当然，在逻辑上，这仍然是个问题：到底 Δt 是不是零，不能说一开始计算的时候不当作零，最后一步当作零。这个逻辑上的困难在微积分的发明者Newton和Leibniz这里一直就没解决，直到后来极限概念的提出和实数系的完善。

那Newton又是怎么说服自己接受这个算起来好像可以，但是逻辑上不通的东西的呢？我不知道。不过，大概其中一个理由是真的在研究运动的时候需要这个计算这个“位置的变化率”以及“速度的变化率”的概念。同时，如果你来曲线的斜率和切线，你发现，$x-t$ 曲线的切线正好对应着上面的 $\bar{v}(t,\Delta t)$ 在 Δt 足够小的时候的定义算式 (2.12)：在任意一个 Δt 取值的时候，$\bar{v}_{t,\Delta t}$ 就是在两个时间点 $t,t+\Delta t$ 的时候的位置差除以时间差，也就是 $x-t$ 曲线的上两点连线的斜率。于是，当 Δt 足够小的时候，$x-t$ 曲线的上两点连线的斜率就成了 $x-t$ 曲线的一点的切线的斜率。而切线是天然存在的。大量的图形都可以画出来这个切线。于是，我们就可以大概说服自己，算式 (2.12) 是可以一用的。是不是Newton也是这样说服自己的就不知道了。至少，我们能算还能用这个概念了。

更一般地，对于任何一个函数 $F(x)$ 我们都可以定义一个这个函数在自变量 x 点的切线的斜率，称作函数 $F(x)$ 的在 x 点的导数 $f(x)$，计算方法完全就是先算除法再让 Δx 等于零，

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}\triangleq F'(x). \tag{2.15}$$

其中，我们用 $\lim_{\Delta x\to 0}$ 表示了先算除法再让 Δx 等于零。后来，这个 $\lim_{\Delta x\to 0}$ 被称为极限，有其严格的定义。如果 $f(x)$ 在定义域所定义的各个 x 点都算得出来，我们就称 $f(x)$ 为原函数 $F(x)$ 的导函数，或者简称导数，而不再关注具体做计算的 x 点。

习题 2.1 (几个导数的计算例子). *计算一下下面几个函数的导数：$x=x_0, x=v_0t, x=v_0t+\frac{1}{2}at^2, x=r\cos(\omega t+\phi), y=r\sin(\omega t+\phi)$。如果算不出来，可以用 SageMath[22], Maple[23], Mathematica[24]等数学软件来辅助计算。不过，还是强烈推荐你用定义式算式 (2.15) 来对这些例子做做计算。*

习题 2.2 (导函数相同的原函数). *证明，如果导函数处处相同 $f(x)=g(x)$，则原函数有 $F(x)=G(x)+c$。其中，c 是常数。反之亦然。这里需要用到一个导函数处处为零的原函数肯定是一个常数的结论。你可能需要先证明它。*

准备好了数学工具，我们就可以来研究运动了。根据Galileo的基于实验的猜测和推理，物体在不受力的情况下，速度不会被改变，会一直运动下去。这也就是说 $v=v_0$ 永远不变，$x=v_0t$ 一直以同样的速度运动下去。正好，我们可以验证，对于位置函数 $x=v_0t$，得到速度函数 $v=v_0$。如果我们进一步关心速度的变化，则得到速度的变化率 $a=0$。也就是说，用这个Newton发明的新的数学工具来表达，Galileo说的就是 $F=0\Rightarrow a=0$，物体不受力的时候运动状态不变。

那么，物体受力的时候会怎样呢？显然，我们需要从这样的实际现象中来研究。自由落体就是一个很好的这样的例子。这里的力是可以直接感知的：一个东西的重量我们可以直接用手感受到。于是，我们问，是不是重的东西和轻的东西下落不一样呢？这个问题已经被Aristotle和Galileo研究过了：下落的一样快。那问题来了，这里，无论轻重物体，其都是受力的，而且看起来受力还不一样大，怎么会导致最后运动相同呢？除非运动就和力完全没有关系。那也就是，无论物体是否受力，物体都做匀速运动，既然我们已经知道不受力的时候做匀速运动？这显然又不是。重物下落的时候速度变化了，也是可以直接感知的，也是可以用平均速度来测量的。那也就是说，运动和力有关系，但是，在自由落体上，这个关系刚好被某个额外的原

[22]https://www.sagemath.org/

[23]https://maplesoft.com/。

[24]https://www.wolfram.com/mathematica/。

因给抵消了，导致运动和物体的重量没关系。

这个时候一个简单的模型就出来了：我们假设重量（也就是自由下落的时候的力，有时候也称为重力）和质量之间存在着线性关系 $F = mg$，速度的变化和质量、力之间也存在这个线性关系 $a = \frac{F}{m}$，合起来，

$$a = \frac{F}{m} = \frac{mg}{m} = g. \tag{2.16}$$

反过来，既然加速度是同一个加速度，则速度只能相差一个常数，只要保证起点位置和起点速度相同，则运动轨迹完全相同。受力的模型 $F = mg$ 和加速度的公式 $a = \frac{F}{m}$ 合起来很好地解释了自由落体运动。进一步的研究可以是，那如果我们已知一个其他的力，例如 $F = F_0$，物体会如何运动。我们可以继续用 $a = \frac{F}{m}$ 来算出来这个力所对应的加速度，得到加速度的原函数——速度，进而得到速度的原函数——位置，然后我们去做实验检验这个计算得到的结果。这样，我们就有了处理给定任何力的情况下的数学模型了。从直觉和前人的研究开始，我们构建了速度、加速度的概念，发明了微积分，猜测和检验通过了 $F = ma$ 这个把力和加速度联系起来的数学模型，我们就暂时完成了一项科学研究工作。

后来，Einstein对这个推理过程做个进一步的批判性思维，问：为什么同一个 m 既出现在运动中（$a = \frac{F}{m}$），也出现在重力中（$F = mg$）。原则上，受力和运动是两件事。例如电荷相互作用中的和 m 地位相同的量是电量 q，$F = Eq$。也就是说，换一个力可能就和关于运动的加速度公式中的质量 m 没有任何关系了。这推动了相对论的诞生。不过，在这里，我们先不关注这个问题。

我们还是先回到Newton的世界。一个反过来的问题是，如果我们知道了物体做什么样的运动，$x(t)$，然后，求出来速度函数 $v(t)$，再求出来加速度函数 $a(t)$，是不是我们也就知道了这个物体受什么力了呢？当然，我们也可以先猜测出来一个受力的函数形式 F，得到 a, v, x，然后验证这个得到的位置函数正好就是观测的结果。那Newton就是这样来解决天体运动的问题的。前面已经提到，为了追求对地面上的物体的运动的描述和天体运动的描述相互统一，我们自然地要把前面得到的概念模型和数学模型迁移到天体的运动。那天体运动的规律已经由Kepler很好地给出来，于是，问题就成了什么样的力会使得天体来做符合开普勒天体运动三定律的运动呢？其实，

在Newton之前，已经有人，例如Christopher Wren（克里斯托弗 · 雷恩），Robert Hooke（罗伯特 · 胡克）和Edmond Halley（埃德蒙多 · 哈雷），猜测天体之间存在引力相互作用，引力的形式是平方反比的 [18]。不过，当时只有Newton有相应的数学武器来完成这个发现检验这个猜想。

这个微积分、加速度和力的关系、天体间引力公式在处理物体运动上太成功了，同时把这样三个非凡的科学贡献做出来的也太少了，后来人们经常把关于运动和力的研究称为Newton 力学，把天体间引力公式称为牛顿万有引力公式。不过，现代微积分所用的名词和符号基本上是从数学家Leibniz那里来的。从这个成功的经验开始，科学就走向了概念建模、数学建模，甚至如果当前数学知识不够就去发明新数学的道路。

现在，我们回顾了天体运动的规律——Kepler三定律及其背后的动力学——牛顿第二定律和万有引力定律，我们用新的角度来看地心说。在数学上有一个定理：任何一个连续的周期为 T 的函数都可以表示为Fourier 级数，

$$z(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{in\omega_0 t}, \tag{2.17}$$

其中 $\omega_0=\frac{2\pi}{T}$。对于准周期函数，也有类似的定理，

$$z(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\omega_n t}, \tag{2.18}$$

其中 ω_n 就不是简单的 $\omega_n=n\omega_0$ 的关系了。或者说，更一般地，任何平方可积函数——你就当作大部分物理现象都满足这个要求，都可以表示为一个Fourier 变换，

$$z(t)=\int d\omega\tilde{z}(\omega)e^{i\omega t}. \tag{2.19}$$

这几个定理和地心说有什么关系呢?我们把平面上的运动轨迹记为 $(x(t),y(t))$，然后定义一个复数，

$$z(t)=x(t)+iy(t). \tag{2.20}$$

然后，我们就可以对这个 $z(t)$ 运用上面的定理了。首先，我们通过今天的知识知道了，地心说的轨迹 $z(t)$ 包含了要观测的天体的运动轨迹和地球的运动轨迹的叠加，因此，不是一个圆形轨道运动，可能是一个准周期函数——没有公倍数的两个周期函数的叠加。当然，肯定满足是一个平方可积

函数的要求。接着，一旦套进去展开公式，我们就发现，对于展开公式中的每一项，有，以最简单的周期函数为例，

$$z_n(t) = C_n e^{in\omega_0 t} = C_n \cos(n\omega_0 t) + iC_n \sin(n\omega_0 t). \tag{2.21}$$

满足，

$$x_n^2(t) + y_n^2(t) = C_n^2. \tag{2.22}$$

因此正好是圆形轨道上的周期运动。于是，我们就把一个一般的运动分解成了一个圆形轨道上的周期运动[25]。其中，每一个圆的半径为 C_n。数学上，每一项的系数 C_n 一般来说随着 n 减小。于是，正好就是大圆套小圆再套小小圆，小小小圆。这样我们对于地心说为什么原则上只要套足够多的圆总是可以准确描述天体运动有了一个理解。

顺便，请问，如果我们没有这个数学知识，不把这个数学知识用来描述天体运动的现象，而且还是一个按照日心说来说已经被淘汰的理论，我们能够理解为什么地心说从描述结果上说会如此地成功吗？你看，对于历史发展的认识和理解也一定程度上基于数学和数学建模，也就是基于科学研究方法。一旦我们面对的世界足够复杂，我们就不可能不用数学和科学来理解它。

当然，Ptolemy肯定没有意识到其所作的猜测可以通过Fourier 变换来理解。但是，我们今天看到了，这个大圆套小圆再套小小圆的模型可以看作是一个准周期函数的Fourier 变换。

有了微积分,我们来展示一个只有用数学才能帮助我们实现的思考——数学是思维的语言，而且有的场合下是唯一适合的语言。大家只要拉着绳子转动过一个小球，就能意识到，为了维持小球的近乎匀速的旋转，我们也需要在绳子上施加一个拉力。否则，小球就飞出去了。为什么速度大小相同也会需要一个力，也就是也有加速度呢？我们来通过数学计算看看，为什么会需要这样一个力，这个力和什么物理量有关。注意，这个维持物体圆周运动所需要的力的表达式也是Newton当年关注的问题：天体运动如果需要一个力来维持，还能够得到这个力的表达式，那么，Newton是不是就可以得到万有引力定律的数学表达式了呢？一会儿我们会发现，如果不靠数学计算，我们发现这个力和得到这个力的表达式的困难有多大。

[25]这部分参考了https://en.wikipedia.org/wiki/Deferent_and_epicycle。

例 2.1 (匀速圆周运动向心力). 有一个长度为 r 的绳子，一端拴着一个小球，一端用手拉着。为了计算简单，我们假设小球在水平面上（如果考虑重力，我们就把这个小球放到一个水平桌面上）做匀速圆周运动。我们来计算一下这个时候的加速度。

以圆心为原点，在小球运动平面上建立一个极坐标和一个直角坐标。选取其中任意一个方位为 x 轴正方向，逆时针方向为 θ 增加方向，逆时针转 90° 的方向为 y 轴正方向。如插入一张图：标上这些坐标轴和量 。

于是，小球的位置随着时间的函数是

$$\vec{r} = r\hat{r} = r\cos(\omega t + \phi)\hat{i} + r\sin(\omega t + \phi)\hat{j}. \tag{2.23}$$

对这个函数求两次导数得到加速度，

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\vec{r} = -\omega r\sin(\omega t + \phi)\hat{i} + \omega r\cos(\omega t + \phi)\hat{j} = \omega r\hat{\theta}, \tag{2.24}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r} = -\omega^2 r\left(\cos(\omega t + \phi)\hat{i} + \sin(\omega t + \phi)\hat{j}\right) = -\omega^2 r\hat{r}. \tag{2.25}$$

因此，这里确实有一个加速度，大小为 $\omega^2 r$，方向为 $-\hat{r}$，也就是径向向内从小球指向圆心。

除了实际上等价但是更加不严格的画图的方式，我迄今为止不知道另一个能够得到这里有一个加速度并且大小方向如上的，除了用微积分来计算之外的途径。因此，数学就是思维的语言，而且有的时候是最恰当的甚至唯一的语言。人类描述世界需要运用思维，因此，数学也是描述世界的语言。

微积分的发明，以及用微积分来描述世界，解决物理问题，是人类创造力的非凡表现。我们学习科学就要学会欣赏这样的非凡的创造，甚至学会做类似的创造。

习题 2.3 (科里奥利（Coriolis）力). 去阅读一下 *Coriolis* 力的概念和推导过程，尝试重复其推导过程。想一想，数学在这里起到什么作用。

我们已经看到力、速度等概念往往来自于对现实的抽象，而且在科学中往往概念是可测量的，很多概念之间的间关系是可计算的，或者说可以用数学结构来表达的。通过上面这些例子，我希望你已经看到概念建模和

数学建模在科学中的重要性，并且看到有的时候概念会通过数学结构来表达甚至通过数学推理计算来得到。

有了概念之后，剩下的事情就是把概念联系起来构成命题，把命题联系起来构成知识体系了。

我们用勾股定理来当例子体会一下概念、命题和知识体系。稍后我们还会在一次回到这个知识体系的主题。

按照Wikipedia 的 "Pythagorean Theorem" 词条，大概公元前 17 世纪以前，巴比伦人就发现了勾股数的存在。大约公元前 5 世纪，印度人也有了勾股数的记载，甚至在等腰直角三角形这个特殊的直角三角形上完成了勾股定理的证明。在成书于大约公元前 2 世纪到公元 2 世纪之间的中国的《九章算术》[19] 上有勾股数和勾股数的计算方法的记载。《周髀算经》[20] 上有一段发生在公元前 10 世纪左右的对话，提到了勾股数和勾股数的计算方法。

在中国，勾股定理的证明——刘徽的"青朱出入图"——出现在公元 2 世纪。成书于公元前 3 世纪的Euclid的《几何原本》[12, 21] 不仅描述了定理，还给了基于公理化数学体系的这个定理的证明。

从生活中发现，某些图形的边之间会出现一个特定的关系是知识的起点。下一步，原则上，就是搞清楚这些图形是不是具有某个类属性的，也就是找到这一类的特征——这时候就有了概念，只要满足这个特征就一定具有这个特定的边关系——这时候就有了命题。再下一步，原则上，就是去问为什么这个类就具有这个特定的边关系。再再下一步，就是去进一步追问这个为什么，直到归结到某个显然的而且尽可能单一的知识起点——在这里"单一的"意味着最好还有很多其他的命题也能够归结到这个知识起点。

实际上，Euclid的《几何原本》[12, 21] 是完成了这件事情的。具体来说，就是发现，只有"直角三角形"这个群体才具有"斜边的平方等于两直角边各自的平方之和（$a^2 + b^2 = c^2$）"这个关系，并且直角三角形可以通过"直角"和"三角形"来定义。进一步，直角可以通过"平角"来定义（直角是平角的一半，或者说把两个直角挨着合起来是一个平角），平角可以通过直线来定义。最终只要能够定义直线，就解决了定义的问题。至于直线的定义，原则上可以用平面上两点之间距离最短的那种连接线来定义。在直线的基础上，我们还可以进一步定义直线长度。加上之前我们已经学习过

的四则运算，我们也就可以来检验是否满足 $a^2+b^2=c^2$ 了。这时候我们也就为勾股定理这个命题做好了准备。

顺便，如果你学习过微分流形上的测地线的概念，这种最短的线就叫做测地线。甚至后来，通过极值条件，最大或者最小，来定义对象成了一个很常用的定义方式。

解决了定义的问题，那就有了命题。我们发现，勾股定理的含义就是所有的直角三角形的三条边都具有 $a^2+b^2=c^2$。第一，我们可以直接用具体的三角形来检验一下：画个直角三角形，测量一下三边长度，测量一下直角是不是直角，检验一下是不是在误差范围内具有这个三边关系。假设我们初步的检验通过了。注意，在数学上，实际测量的检验通过不能确立一个命题，最多只能说如果检验不通过很大概率可以得到命题不成立的结论。第二，我们可以来为什么直角三角形就具有这个三边关系。我们发现，可以用面积关系来证明这个命题。

定理 2.1: 勾股定理

平面上直角三角形的两条直角边的长度记为 a 和 b，斜边的长度记为 c，则

$$c^2=a^2+b^2 \tag{2.26}$$

证明 2.1. 基于割补图形的证明 这个来自于*Pythagoras*的证明是这样的，首先，把一个边长为 $a+b$ 的正方形做两种不同的分割。第一种分割是四个相同的直角三角形把边长为 c 的正方形围在中间。第二种分割是把四个三角形两两组合起来，剩下的是一个边长为 a 的正方形和一个边长为 b 的正方形。按照总面积不变，四个三角形的面积之和也不变，我们得到

$$c^2=S_{Total}-4\times S_{\triangle}=a^2+b^2. \tag{2.27}$$

在这个图形切分的过程中，除了长方形的面积、面积的割补性质，我们实际上还用到了直角三角形的两个锐角之和等于一个直角的度数的性质，也就是三角形内角和等于平角的度数的性质。

除了Pythagoras，中国古代数学家刘徽也给出过类似的证明。

更多的关于勾股定理的证明我们就展开，可以参考吴金闪的《小学数

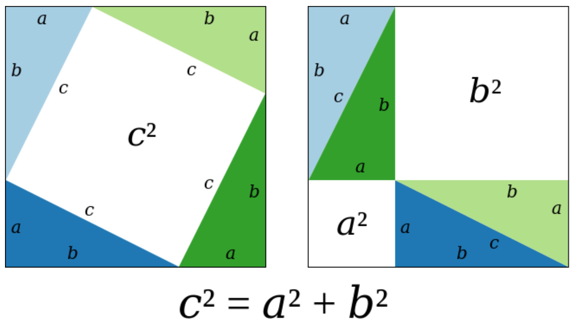

图 2.6: **Pythagoras 割补图形的证明**。把一个边长为 $a+b$ 的正方形做两种不同的分割，可以得到中间区域不同的图形，但是总面积不变，染色部分的面积也不变。图片来自于Wikipedia 的 “Pythagorean Theorem” 词条，感谢 William B. Faulk。2024 年 7 月 8 日访问。

学这样学》[2]。其核心就是通过面积割补的性质以及长方形面积公式——两个图形合起来得到的图形的面积就是两个图形各自的面积合起来。但是，原则上，我们需要进一步追问，那为什么面积具有这个割补性质呢?

后来的高等数学的学习，会告诉我们另一条路，面积本身是通过积分来定义的，而积分自然具有上面的性质。或者换一条路，从平行公理结合面积的公理化定义也可以得到面积的割补性质。

实际上，我们还可以证明，整个平面几何的知识体系，包含其公理、概念、定理以及它们之间的关系，是可以从少数几个公理出发来构建的，而且有好几组这样的公理的选择，并且它们之间等价，如图 2.7 所示。

那这个从勾股定理的发现到勾股定理本身的证明，到从基本公理和定义开始构建整个证明勾股定理的知识体系的例子，在这里说明了什么呢?

我们的目的显然不是教大家平面几何。从这个例子中，我们首先看到：第一、受现实启发以后要定义概念猜测定理，这个过程要做抽象——这一步称为概念建模或者概念化；第二，猜测定理之后尝试去思考这个定理是否成立，为什么这个定理成立，如何来证明这个定理成立——依靠逻辑演绎证明和实验检验；第三，更进一步追问用来证明这个定理的定理来自于哪里，直到构建起来以某种意义上显然的公理为基础的整个知识体系——这一步称为知识的系统化。

因此，通过这个例子，我们希望能够帮助我们的读者们看到通过抽象

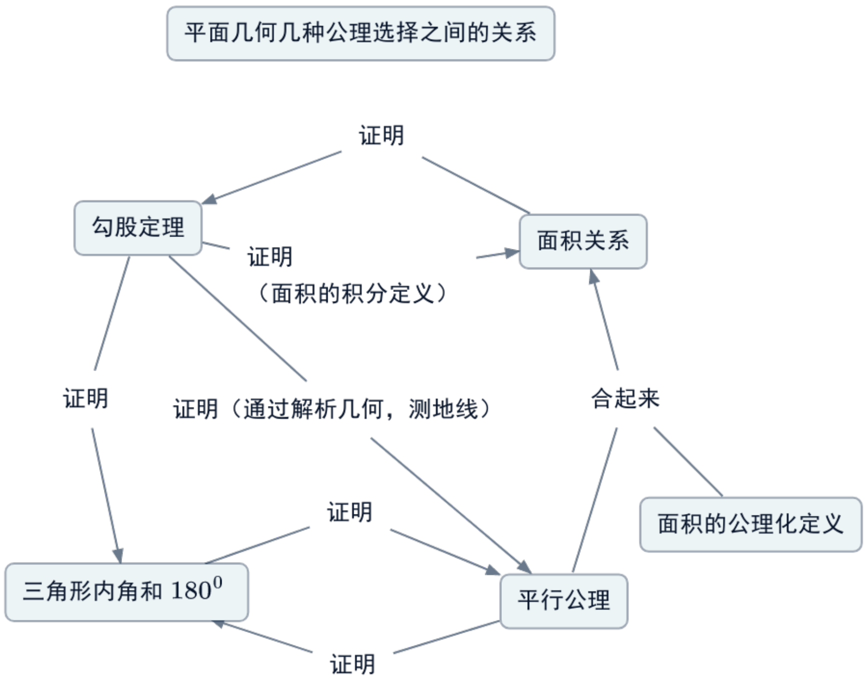

图 2.7: 可以证明，平面几何可以从上面的任何一组公理出发构建其知识体系，这几组公理的选择也是等价的，可以相互证明的。

来做概念建模或者概念化、依靠逻辑演绎证明和实验检验来检验一个命题是否成立、以及构建在最少得假设和定义之上的知识体系在整个科学发展中的重要性。

反过来，在我们中国的历史上，其实不缺对技术的应用，不缺乏被现实启发，但是往往缺乏对概念的提炼，对知识体系的构建，往往主要关注实用性或者案例。例如，《九章算术》[19] 就往往是这样的要解决的问题例子，以及这样的问题用什么方式求解，而没有为什么用这个方式求解（这个往往就需要走到知识体系了），也没有这些例子背后是什么概念（这就需要概念化）。

例 2.2 (《九章算术》方田法). *方田（以御田畴界域）今有田广十五步，从十六步。问为田几何？答曰：一亩。*

又有田广十二步，从十四步。问为田几何？答曰：一百六十八步。

方田术曰：广从步数相乘得积步。

翻译一下就是：问有一块长方形的田，长和宽分别已知，如何求田（的面积）；答田（的面积）为多少，计算方法是把长和宽相乘。

如果我们进一步去提炼出来面积的概念，长方形的概念，长方形的面积为什么是长乘以宽，那么，我们的数学就有可能成为知识体系。当然，可惜，历史上这并没有发生。

各位今天的读者，我们希望你不要重复这个历史。我们固然有我们在人类知识上的贡献，有一些发现或者被启发还很早，但是，我们整个中国人或者中华文明对世界文明在数学和科学上的贡献还远远配不上我们的人口、才智和努力程度。也就是说，这不是因为我们不努力，而是因为我们要么仅仅关注最实用的应用性技术或者案例但是不提炼概念，要么关注最最普遍最最高级别的联系——天人合一或者阴阳五行来好像或者所谓地而不是可实验检验可重复可计算地可逻辑推理低解释一切。今天，看完这一节，我希望你更加关注这些中间层次：从技术和案例走到概念，从概念走到命题和命题的证明和检验，更进一步走到知识体系。而这个过程中，不过就是概念化和知识的系统化，加上批判性思维（通过逻辑演绎和实验来检验命题），仅此而已。

我们再来补充一个技术和物理学的例子。1654 年当时担任德国马德堡市长的Otto von Guericke（奥托 · 冯 · 格里克）做了著名的马德堡半球实验。

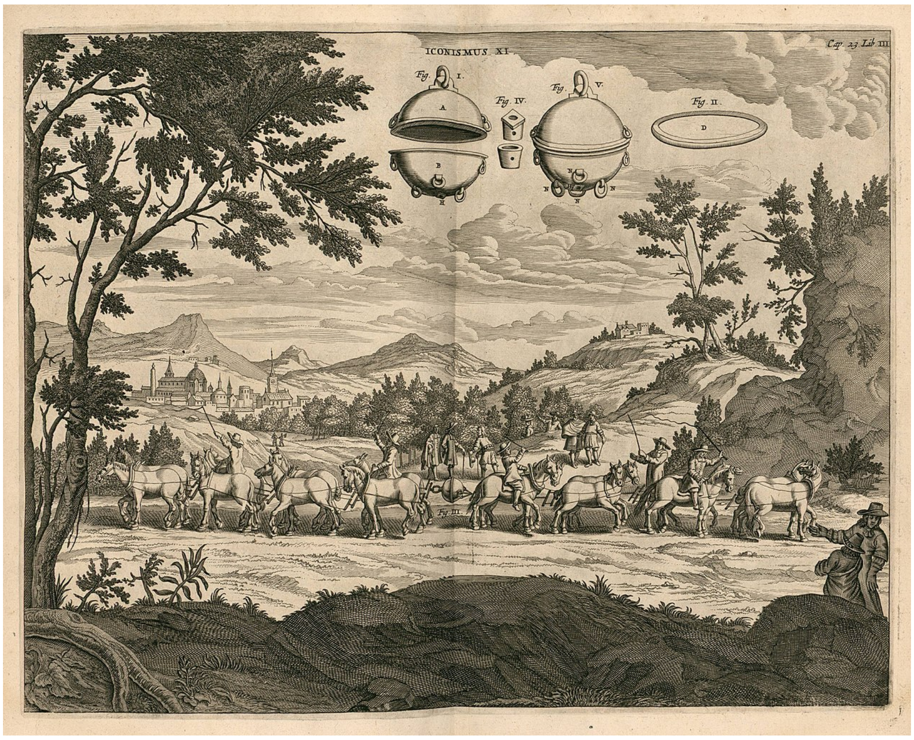

图 2.8: Gaspar Schott 所做的展示马德堡半球实验的木刻画。图片来自于Wikipedia“Magdeburg hemispheres”词条。

如图 2.8 所示，在这个实验中，两个半球形的铜球连接在一起，铜球内部抽成真空，发现，16 匹马都拉不开这个没有施加任何外力的铜球。铜球的实物目前保存在德国莫尼黑的德意志博物馆。图 2.9 是一张这个实物的照片。

这个实验说明了大气压的存在：马拉不开，就表示，就算外界我们觉得没有施加任何作用力，铜球上还是有外界给的保持这个球不容易被打开的力。联系到Evangelista Torricelli（埃万杰利斯塔 · 托里拆利）大气压强的水银汞柱实验，我们发现，大气可以看做是这个看不见的力的来源。和Galileo的斜面相同，这个实验装置没有丝毫的实际作用，完全就是为了展示一个科学原理。

顺便，这个实验本身对于物理学，以及整个科学的发展，也是极其重要的。Galileo已经通过斜面实验来开展了对落体运动的研究，得到了一些和就直接生活经验——相当于没有精细设计的不系统的粗糙实验——有矛盾的结论，启发了后来人的研究。而这个马德堡半球实验抓眼球和促进人们

图 2.9: 马德堡半球实验所用的原始的两个半球的照片。图片来自于德意志博物馆数字馆藏。

开始思考科学现象和原理的效果和传说中的比萨斜塔如果其真的发生过的话是类似的：从这个实验，人们可以极大地感受到科学研究是要通过实验来进行的。不过，因为之前我们已经通过其他例子让大家体会到了这一点，因此，在这里，举这个马德堡半球实验的例子是用来体现概念化、知识的系统性在科学发展中的重要作用，尤其是和中国的相应情形作对比之后。

实际上，在中国古代，早就有了对大气压的感知和利用，例如图 2.10 中展示的来自于战国时期的汲酒器。其工作原理就是大气压：在把汲酒器放入到酒坛中的时候，酒会由于内外液体平面的差而进入汲酒器；然后用手摁住汲酒器上方细管上的小孔，这时候把汲酒器提起来，中间应该会发生一点点汲酒器内酒回流到酒坛的现象于是导致其内部气压小于外部气压（封闭在细管中的空气体积变大了，压强变小了），于是，就算把汲酒器拿出来到酒坛的外面，酒也不会撒出来了；汲酒器到了喝酒的容器上方就松开小孔，内外气压一致，不足以支撑酒的压力，酒自然流出。

可是，问题来了，我们自从发现和利用这个现象之后，有去做概念化吗？有去提出和检验命题吗？有去构建知识体系吗？

我们这个时代的未来的科学家，未来的系统科学研究者，你们不能仍

图 2.10: 中国战国时期汲酒器。图片来自于http://www.sanyamuseum.com/a/chenliexuanjiao/2022/1117/1581.html。

然停留在只关注最最实用的层面和最最普遍最最高级的联系的层面，而是得从实用走向概念、命题、知识体系。

2.8 从自旋的量子力学看概念建模和数学建模

之前，我们已经和Newton一起从机械运动的经验和体验中提炼出来了瞬时速度的概念及其数学定义，也从当时的前人的研究中猜测和检验通过了 $F = ma$ 这个命题，这也是概念建模和数学建模——把不同的已经明确定义的概念[26]关联起来构成命题并且用数学结构来表达这个关系。后来，当我们把 $F = ma$ 用于天体运动的时候，我们还从数学上推导出来了运动天体和太阳之间的万有引力的数学形式。这也是概念建模，而且是反过来的，先有数学模型，把数学模型用于某个场景得到一个新的对象，然后对这个新的对象对一个推广，形成一个类，于是得到一个概念。其实，James Maxwell（詹姆斯 · 麦克斯韦）也做了很相似的一件事情——提出位移电流。先得到一套描述电磁场的方程，然后发现，这套方成形式上不够对称，也不能很好地描述电容器充电过程中电场和电量都在变化的过程，于是，提出一个来自于电场变化的“虚拟的”电流。发现，有了这个电流项，方程也更加对称了，充电过程也能够得到描述了。于是，位移电流就成了一个电磁现象中的概念。这也是先建立电磁场的概念和数学模型，然后，运用数学模型来描述现象，发现一个新的概念的例子。

下面，我们来看另一个能够更好地体会到概念建模和数学建模的物理学研究案例——自旋的量子力学模型的建构。不过，遗憾的是欣赏这个研究需要一点点线性代数的知识以及一颗非常愿意思考的脑子。没准你刚好具有呢！在这里，我们偶尔会有不严格和跳跃的地方。如果你想更加严格地学会其中的每一步，请参考吴金闪《二态系统的量子力学》[22]。

自旋的概念的第一次被启发来自于Stern-Gerlach 实验：Stern和Gerlach让一束银原子通过如图 2.11 的仪器——其有一个内部方向（其实由其内部的磁场决定），然后发现，通常一束电中性银原子过这个仪器之后会在屏幕上产生两个斑点。这就是著名的Stern-Gerlach 实验。这个实验首先揭示了银

[26] 这里有一个一般的力如何定义的逻辑问题。我们假装我们只关心具体的已知大小的力，例如重力、电磁力等。

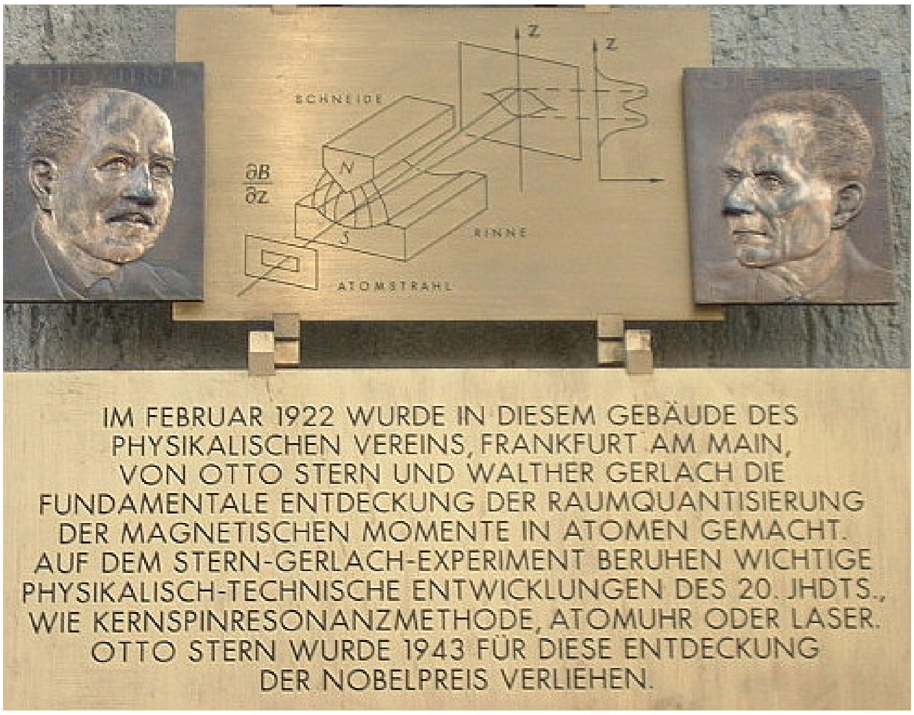

图 2.11: 来自于Otto Stern (奥托 · 斯特恩) 和Walther Gerlach (瓦尔特 · 盖拉赫) 的自旋 Stern-Gerlach 装置示意图。图片来自于 Wikipedia 页面`https://en.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach_experiment`。

原子具有一个新的自由度——肯定不是带电造成的也不是通常的空间自由度，这个自由度至少有两个离散的状态值。离散状态的自由度这一点本身在当时就是一个很大突破：当时机械运动的物体的自由度主要是空间自由度，而空间自由度是连续的。如果是带电的也很好解释，带电粒子在磁场中受到电磁力的作用会发生偏转。但是银原子是电中性的。那这个新的自由度到底是什么呢，也就是用什么数学结构来描述这个新的自由度呢？

2.8.1 经典概率论和矩阵的 Dirac 符号表示

这一小节介绍的新的数学——矢量和矩阵的 Dirac 符号表示，实际上比传统的矢量和矩阵的分量表示要简单很多很多，也要深刻和准确很多很多。请你尝试去学习和习惯一下这个新的表示方式。一旦学会了，你看世界的方式就会不一样——数学不过就是在你需要（用来辅助思考或者描述世界）的时候创造出来的东西[27]。

如果你已经学习过矢量和矩阵，则 Dirac 符号是一套用来表示矢量和矩阵的符号，也就是把传统的矢量和矩阵分别写作

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = [x, y, z] \longrightarrow |r\rangle = x\,|1\rangle + y\,|2\rangle + z\,|3\rangle, \tag{2.28}$$

$$A = \left[A^i_j\right]_{M\times N} \longrightarrow A = \sum_{i=1,j=1}^{M,N} A^i_j\,|i\rangle\langle j|\,. \tag{2.29}$$

然后，当我们要计算矩阵和矢量的乘法，矩阵之间的乘法，矢量之间的投影（内积）的时候，我们会遇到 $\langle\mu|\,\nu\rangle$ 这样的算式；当我们需要计算矢量和矢量之间的并矢计算（如果你没有听说过的并矢话，不用管），也就是从矢量得到矩阵的时候，我们会遇到 $|\mu\rangle\langle\nu|$ 这样的算式。我们稍后会学习怎么来计算它们，见算式 (2.39)。也就是说，拟将会看到：Dirac 符号完全和你之前已经学习过的分量形式表达的矢量和矩阵等价。

如果你没有学习过矢量和矩阵，则正好我们从头学起——这反而更加简单也能够帮你把 Dirac 符号理解得更好。回到经典硬币，我们有一个很

[27]这句话转引自Paul Dirac（保罗 · 狄拉克）：作者在彭桓武的一次报告中问了彭先生数学和物理的关系这个问题，彭先生说他也问过Dirac同样的问题，然后把上面这个答案转述给作者。

简单的离散两状态的数学模型——经典概率论。硬币拥有正反两面的状态，分别记作 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 状态。一个硬币的最一般的状态记作一个概率分布函数，

$$p^c = \begin{cases} p_\uparrow & \uparrow, \\ p_\downarrow & \downarrow. \end{cases} \tag{2.30}$$

或者等价地记作

$$\rho^c = p_\uparrow \left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| + p_\downarrow \left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right|. \tag{2.31}$$

后面这个符号就是前面这个符号的另一种写法，$\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right|$ 对应者前者的第一行的情况，$\left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right|$ 对应者前者的第二行的情况。这个新记号的好处是，不用分情况写成好几行，只需要一行就可以写出来。

顺便，如果要算一下分布函数的某个量的均值，例如这样的一个量，

$$A = \sum_\mu A_\mu \left|\mu\right\rangle\left\langle\mu\right| \tag{2.32}$$

我们就可以用下面的公式，

$$\langle A\rangle = \sum_\mu A_\mu p_\mu = A_\uparrow p_\uparrow + A_\downarrow p_\downarrow. \tag{2.33}$$

例如，如果一个规则 E 是硬币正面你获得 10 元，硬币反面你失去 5 元，就写成，

$$E = 10 \left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| - 5 \left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right|, \tag{2.34}$$

就可以得到你收入的均值，

$$\langle E\rangle = 10p_\uparrow - 5p_\downarrow. \tag{2.35}$$

如果是完全对称的硬币，那么

$$\langle E\rangle = 10\frac{1}{2} - 5\frac{1}{2} = 2.5. \tag{2.36}$$

我们还可以直接用算式 (2.31) 和求均值的定义（其中用到了“求迹”运算，也就是 $tr(A) = \sum_i \left\langle i\right| A \left|i\right\rangle$）

$$\langle A\rangle_\rho = tr(A\rho) = \sum_i \left\langle i\right| A\rho \left|i\right\rangle \tag{2.37}$$

来计算得到均值，只需要约定，

$$\langle\uparrow|\uparrow\rangle = 1, \langle\uparrow|\downarrow\rangle = 0, \langle\downarrow|\uparrow\rangle = 0, \langle\downarrow|\downarrow\rangle = 1. \tag{2.38}$$

合起来记作

$$\langle\mu|\nu\rangle = \delta_{\mu\nu}, \tag{2.39}$$

其中 $\delta_{\mu\nu}$ 被称为Kronecker δ 记号，两变量相同值等于 1，否则等于零，也就是

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1 & \mu = \nu, \\ 0 & \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{2.40}$$

这是 Dirac 符号中唯一需要记住的运算规则，而且基于矢量投影可以很好地理解这个运算规则：相同的状态左右箭头符号对起来相遇表示一个状态在自己身上的投影，自然等于 1；否则两个完全正交的状态之间做投影必然等于零。注意，如果是先右箭头再左箭头，也就是形如 $|\mu\rangle\langle\nu|$ 则不要运用上面的计算规则。

我们可以检验一下是不是矩阵乘法在两套语言下相符。按照元素定义为

$$(AB)^i_j = \sum_k A^i_k B^k_j, \tag{2.41}$$

按照整个矩阵定义为

$$\begin{aligned} AB = & \sum_{i,l,m,j} A^i_l |i\rangle\langle l| B^m_j |m\rangle\langle j|, \\ = & \sum_{i,l,m,j} A^i_l B^m_j |i\rangle(\langle l| m\rangle)\langle j|, \\ = & \sum_{i,l,m,j} A^i_l B^m_j |i\rangle\langle j| \delta_{lm}, \\ = & \sum_{i,l,j} A^i_l B^l_j |i\rangle\langle j|. \end{aligned} \tag{2.42}$$

求其这个矩阵的 i, j 分量为，

$$\begin{aligned}\langle i| AB |j\rangle &= \langle i| \left(\sum_{m,l,n} A_l^m B_n^l |m\rangle\langle n|\right) |j\rangle, \\ &= \sum_{m,l,n} A_l^m B_n^l \delta_{im}\delta_{nj}, \\ &= \sum_l A_l^i B_j^l \end{aligned} \tag{2.43}$$

两者完全吻合。

习题 2.4 (证明矩阵乘法的整体定义和元素定义等价). 先取两个 2×2 的矩阵，例如，从 $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$、$\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 选两个，计算乘法，具体算一下，看看两种计算方法得到的结果是否一致。然后，重复算式 (2.42) 的计算过程，证明一般的矩阵两种计算方法得到的结果相同。

习题 2.5 (证明对于经典概率分布函数两种均值计算方式等价). 证明对于经典概率分布函数的两种计算方式算式 (2.33) 和算式 (2.37) 得到的结果相同。你可以直接针对任意的分布函数和任意的需要算均值的量来证明，也可以先尝试几个特例，然后再来证明一般情况。

如果你以前已经学过矩阵的概念——排成一个方形的一堆数，我们这里，实际上是那一堆数中的处于第 i 行和第 j 列的每一个数 A_j^i 都配上相应位置的表示 $A_j^i |i\rangle\langle j|$。这样整个矩阵就成了一个加法算式，

$$A = \sum_{ij} A_j^i |i\rangle\langle j|. \tag{2.44}$$

毕竟加法和乘法才是我们最容易操作的过程。

注意算式 (2.37) 同样可以用于系统处于某个状态下的概率的计算，例如，我们取 $A = |\mu\rangle\langle\mu|$，则算出来的就是系统处于状态 $|\mu\rangle\langle\mu|$ 的概率，

$$\langle|\mu\rangle\langle\mu|\rangle_\rho = tr(|\mu\rangle\langle\mu| \rho) = \langle\mu| \rho |\mu\rangle = p_\mu. \tag{2.45}$$

习题 2.6 (证明经典概率分布函数算式 (2.45) 成立). 对于一个任意的经典概率分布函数，证明，算式 (2.45) 成立，也就是经过算式 (2.37) 矩阵乘法和求迹计算以后得到的就是状态为 μ 的概率 p_μ。

现在，我们已经学会了经典概率论和矩阵的 Dirac 符号表示，我们就可以来构建自旋的量子力学模型了。

2.8.2 自旋的实验现象和数学模型

我们把上（下）方的斑点对应的路径称为向上（下）态的路径（物理学具体知识会告诉我们，实际上这个“上下”的命名其实应该是倒过来的，应该是“下上”。不过，在这里无所谓）。首先，我们发现，如果仅仅是如图 2.11 中的Stern-Gerlach 实验得到两个强度相同的斑点，那么，

$$\rho^c = \frac{1}{2}\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right| + \frac{1}{2}\left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right| \tag{2.46}$$

就很好地解释了这个现象：自旋就可以用两状态的完全对称的硬币来描述。

但是，之后，人们就进行了进一步的实验。我们先来看图 2.12 中这个实验：在原始实验装置后面再增加一个磁场，而且保持增加的磁场的方向和之前的装置的方向相同。如果我们把其中的向下的路径盖住，那么没有被盖住的继续进入第二个磁场的粒子的状态应该是，

$$\rho_2^c = \left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right|. \tag{2.47}$$

如果这个状态进入到第二个磁场，如图 2.12，那么，我们会观测到的两个可能的状态的概率分别为，

$$\langle p_\uparrow\rangle = tr\left(\rho_2^c\left|\uparrow\right\rangle\left\langle\uparrow\right|\right) = 1, \langle p_\downarrow\rangle = tr\left(\rho_2^c\left|\downarrow\right\rangle\left\langle\downarrow\right|\right) = 0. \tag{2.48}$$

也就是说，我们只能观测到向上的状态而没有向下的状态。这个结果正好和图 2.12 的实验结果相符。

那看起来我们用两状态经典概率分布函数——也就是硬币的模型——描述自旋的实验观测行为很成功啊。但是，坏事的进一步实验来了。现在，我们来做一些稍微更有趣的实验，逼迫我们构建超越两状态经典概率分布函数来描述自旋。未来我们会知道，我们需要引入的突破是“状态的矢量叠加”。

我们让 $\hat{z}$ 方向的仪器出来的向上态的粒子经过一个内部方向为 $\hat{x}$ 方向的仪器，如图 2.13，打到屏幕上。问：屏上有一个还是两个斑点？实验结果

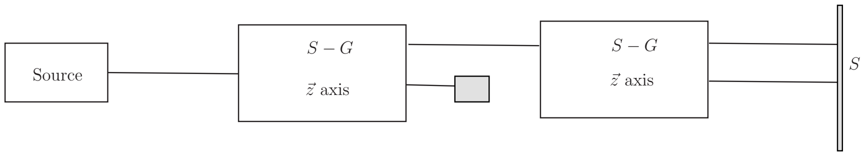

图 2.12: 自旋经过一个 Stern-Gerlach 装置——其内部就是一个磁场——之后挡住向下的输出，这样从装置出来的状态就是第一个装置的向上方向。接着让这个输出的自旋再一次经过同样方向的装置——得到仅有一个向上的输出结果。

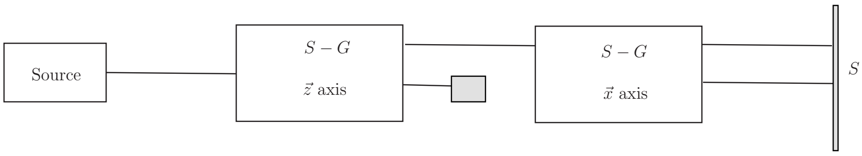

图 2.13: 电子过两个不同方向磁场实验装置示意图，先过 z 方向，接着 x 方向。

是一个个粒子射出，累积了一大群之后会得到两个斑点，但是单次射出粒子的实验只能得到一个斑点。怎么解释？

我们如果坚持用两状态经典概率分布函数来描述自旋，则相当于要求

$$\langle p_{\uparrow_x}\rangle = tr\left(\rho_2^c \left|\uparrow_x\right\rangle\left\langle\uparrow_x\right|\right) = \frac{1}{2}, \langle p_{\downarrow_x}\rangle = tr\left(\rho_2^c \left|\downarrow_x\right\rangle\left\langle\downarrow_x\right|\right) = \frac{1}{2}. \tag{2.49}$$

注意，我们已经知道

$$\rho_2^c = \left|\uparrow_z\right\rangle\left\langle\uparrow_z\right|. \tag{2.50}$$

于是，我们就得到[28]，

$$tr\left(\left|\uparrow_z\right\rangle\left\langle\uparrow_z\right| \uparrow_x\rangle\left\langle\uparrow_x\right|\right) = \left|\left\langle\uparrow_z\right| \uparrow_x\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}, \tag{2.51a}$$

$$tr\left(\left|\uparrow_z\right\rangle\left\langle\uparrow_z\right| \downarrow_x\rangle\left\langle\downarrow_x\right|\right) = \left|\left\langle\uparrow_z\right| \downarrow_x\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}. \tag{2.51b}$$

[28]这里我们用到了复数的计算公式，$c \times c^* = |c|^2$。

也就是说，必须有

$$\langle \uparrow_z | \uparrow_x \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\phi}, \tag{2.52a}$$

$$\langle \uparrow_z | \downarrow_x \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\psi}. \tag{2.52b}$$

类似地，我们也可以先让自旋通过 x 方向，然后再到 z 方向，就可以得到

$$\langle \uparrow_x | \uparrow_z \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\phi'}, \tag{2.53a}$$

$$\langle \uparrow_x | \downarrow_z \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\psi'}. \tag{2.53b}$$

甚至，我们可以把任意的这样两个方向组合起来，做这个实验，就可以得到任意的 $\langle \uparrow_{\hat{r}_1} | \uparrow_{\hat{r}_2} \rangle, \langle \uparrow_{\hat{r}_1} | \downarrow_{\hat{r}_2} \rangle$。

现在我们来仔细分析算式 (2.52) 这个结果：相当于，我们看到一个处于 $|\uparrow_x\rangle$ 的状态中包含了 $|\uparrow_z\rangle$ 的成分，$|\downarrow_x\rangle$ 的状态中也包含了 $|\uparrow_z\rangle$ 的成分。这个违反离散型的经典概率论的基本假设：基本事件集里面的事件本身是互斥的，也就是每次只能出现基本事件集中的一个。反而，这个结果和我们熟悉的矢量计算很像。例如，我们可以取这样的两个矢量来试试，

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(|\uparrow_z\rangle + |\uparrow_z\rangle \right), \tag{2.54a}$$

$$|\downarrow_x\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(|\uparrow_z\rangle - |\uparrow_z\rangle \right). \tag{2.54b}$$

你会发现，这个矢量分解的关系式完全满足上面的要求。注意，在经典概率论的世界中，这是绝对不能出现的关系。这也是经典方向矢量位置矢量的世界中完全不可能出现的事情。在那里，

$$|\uparrow_x\rangle = [1,0,0]^T, |\downarrow_x\rangle = -[1,0,0]^T, \tag{2.55a}$$

$$|\uparrow_z\rangle = [0,0,1]^T, |\downarrow_z\rangle = -[0,0,1]^T, \tag{2.55b}$$

完全不能满足算式 (2.52) 的要求。我们遇到了需要新的数学对象的时候了！

那这个数学对象到底是什么呢？今天我们当然知道，它是Hilbert 空间的矢量。当时的物理学家是在尝试了大量的其他描述之后猜出来的。用今天的语言，我们把 $|\uparrow_x\rangle, |\uparrow_y\rangle, |\uparrow_z\rangle$ 分别定义为 $\sigma_x, \sigma_x, \sigma_z$ 三个矩阵的本征值为 1 的本征矢量，$|\downarrow_x\rangle, |\downarrow_y\rangle, |\downarrow_z\rangle$ 分别定义为 $\sigma_x, \sigma_x, \sigma_z$ 三个矩阵的本征值为 -1

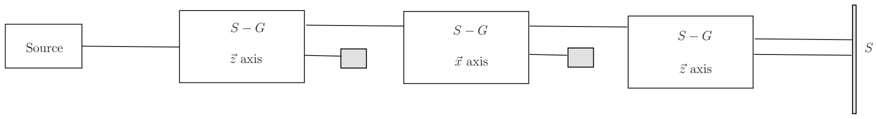

图 2.14: 电子过三个方向磁场实验装置示意图，先过 z 方向，接着 x 方向，然后 z 方向。

的本征矢量，就可以满足算式 (2.52)。注意，算式 (2.52) 是来自于实验现象的要求，任何理论一定要满足的。

习题 2.7 ($\sigma_x, \sigma_x, \sigma_z$ 的本征矢量)**.** 证明，$\sigma_x, \sigma_x, \sigma_z$ 三个矩阵的本征值为 ± 1 的本征矢量正好满足算式 (2.52) 的要求。

于是，我们就得到了自旋的数学模型，以及建立起来了自旋这个新的运动自由度的概念。在这里，原则上我们还得交代为什么自旋的状态会影响粒子在位置空间的运动，才能完整地解释前面的实验结果。不过，这部分需要额外的物理学的具体知识，我们就不再展开了。

有了自旋的概念和数学模型，从科学研究的角度来说，我们就需要作进一步的实验来检验这个概念和数学模型了。比如说，我们来看看让粒子经过下面的图 2.14 中的三个磁场会怎样，理论结果和实验结果是不是相符。

我们让 z 方向的仪器出来的向上态的自旋经过一个内部方向为 $\hat{x}$ 方向的仪器。出来的向上态的自旋再次经过 z 方向的仪器，打到屏幕上。问：屏上有一个还是两个斑点？如果按照经典概率论的直觉判断，一开始去掉了 z 方向向下的自旋，中间干的事情是 x 方向自旋的事情，后面按道理应该不再出现 z 方向向下的自旋，于是你的预测是只有一个斑点。如果你去按照前面构建的自旋的Hilbert 空间矢量的模型来做一下计算，你就会发现，在倒数第二步，也就是从 x 方向出来并且盖住向下的自旋之后，自旋的状态为，

$$\rho = \left|\uparrow_x\right\rangle. \tag{2.56}$$

接着，进入 z 方向的磁场，于是，我们要计算

$$p_{\uparrow_z} = tr\left(\rho \left|\uparrow_z\right\rangle\left\langle\uparrow_z\right|\right) = \frac{1}{2}, p_{\downarrow_z} = tr\left(\rho \left|\downarrow_z\right\rangle\left\langle\downarrow_z\right|\right) = \frac{1}{2}. \tag{2.57}$$

于是，我们得到有两个强度相同的输出。

在这个研究中，我们其实基本上看到了科学研究的全过程，通过实验和测量受到现实世界的启发，概念建模和数学建模，实验检验，就差知识的系统化了。当然，在这里，我们更加强调这个研究过程很好地体现了概念建模和数学建模这一步。

2.9 从热力学和统计物理看到知识的系统化

知识的系统化指的是把不同的命题不同的概念联系起来，梳理出来一个最基本的概念和命题，然后，从这里可以得到其他的概念和命题。实际上，知识的系统化的第一个例子就是Euclid的《几何原本》[12]——把三四百条之前已经知道的命题梳理了一下，找到了最本定义和基本公理，然后从它们来证明这些命题。

那物理学里面有没有体现知识的系统化的例子呢？有热力学和统计物理学，还有量子力学。它们都曾经有过一个时代，在那个时代有各种针对具体情况的定律以及针对具体现象的模型。但是，逐渐地，当人们把这些定律和模型都做了一番梳理之后，就发现，其实只需要很少的几条假设和几个定义，就可以得到所有的这些定律和模型。这就是物理学中知识的系统化的例子。尽管我个人非常喜欢量子力学的案例，但是，考虑到理解量子力学的知识的难度要远远大于理解热力学和统计物理学的知识，我就偷个懒，用热力学和统计物理学的例子吧。

物理学都是从实验中发展而来的，热力学自然也是。在搞清楚热力学的背后是统计物理学的分子运动论和热平衡分布之前，我们就有了关于气体的经验定律。它们分别是等温变化的玻意耳定律，等容变化的查理定律和等压变化的盖吕萨克定律，分别表示为，对于一盒子气体，

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{V_2}{V_1}, \tag{2.58}$$

等温变化气体的压强和体积成反比，

$$\frac{P_1}{P_2}=\frac{T_1}{T_2}, \tag{2.59}$$

等容变化气体的压强和温度成正比，

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{T_1}{T_2}, \tag{2.60}$$

等压变化气体的体积和温度成正比。于是，这三项合起来，我们很容易猜测，说明了

$$\frac{P_1V_1}{T_1}=\frac{P_2V_2}{T_2}=C. \tag{2.61}$$

而且这个常数 C 对于给定质量的固定种类的气体而言的，也就是说，如果气体的种类变了质量变了，有可能这个常数会变。当然，今天我们知道，这就是理想气体状态方程，

$$PV=nRT. \tag{2.62}$$

其中 n 是盒子内气体的摩尔数，R 是一个比例常数。也就是前面的 $C=nR$。如果从质量上来考虑，$n=\frac{m}{N_Am_0}$，其中 m 是这一盒子气体的总质量，m_0 每个气体分子的质量依赖于气体种类，$N_A=6.02214076\times10^{23}$ 是Avogadro常数，表示把这么多个分子叫做 1 摩尔的分子，也就是规定了 1 摩尔对应的数量。

为什么右侧会和物质的总质量或者说分子的数量有关呢？这个其实也很好理解：当我们在相同体积、温度和压强的两份气体合起来放入同一个体积维持相同的温度的时候，显然，就可以基于生活经验猜到压强应该增加——这就是给气球充气的原理，吹进去的气越多，其压强就会越大。因此，$\frac{PV}{T}=C$ 这个常数显然和气体的总质量有关。当然，在这里，我们发现，其实是总分子数而不直接就是总质量，也就是说，每个分子自身的质量的不同会造成气体总质量的不同但是只要维持分子总数不变，右侧的常数就不变。这个结果还是需要进一步实验检验或者理论证明的。不过，在这里，我们暂时直接接受这个结果。也就是说，$\frac{PV}{T}=n\tilde{C}$，至于常数 $\tilde{C}$ 依赖于具体的分子（从而依赖于单个分子质量）还是对所有分子都相同，我们暂时去思考为什么，只接受结果——这个常数不依赖于具体分子对所有分子都相同。原则上，这个结果是可以通过做实验来检验的：比例说，我们放入一定总质量（m^1）的一种气体，一定总质量（m^2）的另一种气体，我们会发现，只要 $\frac{m^1}{m^2}$ 等于某个特定值（其实就是单个气体分子的质量之比 $\frac{m_0^1}{m_0^2}$ 从而保证两者的分子数量相同），则两者的 $\frac{PV}{T}$ 相同。只要实验上验证了这个结果，则我们就可以得到背后不是质量直接影响常数 $\tilde{C}$ 而是分子数量。

这里，从气体的分开的三个实验定律，得到理想气体状态方程，就初步地体现了知识的系统性。一旦有了理想气体状态方程，我们就很自然地可

以得到气体的分开的三个实验定律了。更进一步，如果我们还能从更基本的概念和假设的基础上来得到理想气体状态方程，那就更好了，尤其是这个从更基本的假设得到理想气体状态方程的过程肯定也就揭示了为什么会出现公式里面的 n，以及为什么不同物质构成的气体都遵循这同一个公式，或者在什么条件下遵循这同一个公式。我们稍后回到这个问题。

在统计物理学，也就是平衡态热力学的理论基础发展起来之前，物理学家已经发现了其他的实验定律。例如，热力学第一定律和热力学第二定律。例如James Prescott Joule（詹姆斯 · 普雷斯科特 · 焦耳）发现了热功当量，也就是，在保证对这个系统做的功再不能传递到其他地方和转化为其他形式的条件下，也称为绝热条件下，对一个系统做多少功和这个系统升高的温度——于是也就是内能的增加——是完全一一对应的。这就说明，能量是守恒的，外界对系统做的功等于系统内能的增加。更一般地，系统还可以直接从外界吸收热量。不过，热量在不同的物质之间传递而没有做功的情形在当时已经得到研究，得到了吸收热量等于内能的增加。把两者合起来就是热力学过程的能量守恒定律，也就是热力学第一定律，

$$dU = \delta Q - \delta W, \tag{2.63}$$

内能的增加（dU）等于系统从外界吸收的热量（δQ）减去系统对外界的功（δW），或者说加上外界对系统做的功（$-\delta W$）。这已经把两个不同的过程，吸热和做功，整合起来的表达式了。

热力学第二定律也是一个实验定律。例如，我们看到双手摩擦或者两个铁块摩擦可以生热，但是很少看到热可以完全变成机械运动的，尽管热通过做功完全变成机械运动并不违反热力学第一定律，$\delta Q - \delta W = 0$。当时已经有蒸汽机这样的把热转化为动能的机器。是否从原理上允许把所有的热转化为功，而不带来任何其他影响，在工程是是一个很有意义的问题。当然，在实际蒸汽机中，我们往往会看到工作物质，也就是蒸汽，把进入和出来的蒸汽相比，肯定是出来的温度更高，也就是其携带了一部分热量。也就是说，没有把所有的蒸汽吸收的热量都转化为功，蒸汽本身留着一部分呢。于是，这就被总结为：不可能从单一的热源吸收热量且对外做功而不产生其他的影响（例如，工作物质的温度回到原来的温度）。

类似地，我们看到一盒子气体，一开始不均匀，例如刚放进去的一团气体分子可能集中在盒子的一侧，然后随着时间，慢慢地，这团气体会充满整

个盒子。这个盒子不需要和外界交换任何能量，或者对外做功，也可以不交换任何气体分子。这样的系统我们称为孤立系统，其中 $\delta Q = 0, \delta W = 0$，于是 $dU = 0$。我们发现，孤立系统如果有演化，这个演化竟然总是向着更加均匀的方向来演化的。这件事情，在定义一个熵来表示均匀程度之后——熵越大越均匀，就被表示为，孤立系统熵自发增加，

$$dS \geqslant 0. \tag{2.64}$$

进一步，当系统包含和外界的能量交流之后，例如吸收热量和做功，那这个关系会更加复杂，因为这时候 $\delta Q, \delta W, dU$ 可能都不等于零。相当于算式 (2.64) 中右侧的 0，需要替换成 $\delta Q, \delta W, dU$ 的某个表达式。注意，这三个变量只有两个是独立的，因为其满足热力学第一定律。物理学家经过研究之后发现，需要把算式 (2.64) 修改成

$$TdS \geqslant \delta Q = dU + \delta W. \tag{2.65}$$

具体为什么会是这个表达式暂时可以不管它，大概来说，就是，系统吸收热量会导致分子热运动更加激烈也就是由熵所描述的运动的无序程度增加：在温度恒定而且过程可逆的时候，系统吸收的热量 $\delta Q = TdS$，但是，如果不可逆——例如包含前面的气体分子在盒子里面变得更加均匀，则系统熵的增加会更高。合起来，上就有了两个引起熵变化的途径：平衡系统吸收或者释放热量（从而连着内能变化和做功），系统从非平衡趋向平衡。不过，在这里这个公式的具体含义不是重点。读者能够看到这个公式的含义当然更好，看不懂的话，只需要知道，基于实验发现以及工程需求，历史上物理学家除了热力学第一定律还发现了特例学第二定律就行了。

于是，那更进一步的问题就是，是不是我们可以从一个理论模型把所有的这些实验定律，包含理想气体状态方程和热力学第一第二定律，都可以通过推理得到？于是，物理学家假设，热平衡的系统的状态符合特定的分布。例如，和外界交换能量维持温度不变的系统——称为正则系统——其状态分布函数符合如下的正则分布，

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H}, \tag{2.66}$$

其中 Z 是一个归一化常数，

$$Z=\sum_{x_i} e^{-\beta H(x_i)}, \tag{2.67}$$

其中 $H(x_i)$ 是系统处于状态 x_i（例如，对于机械运动的物体 $x_i=(\vec{r}_i,\vec{v}_i)$，也就是包含了位置和动量）的时候的动能和势能之和，而 $\beta=\frac{1}{k_B T}$ 是温度的倒数乘上一个常数——称为玻尔兹曼常数。

例如，如果是 N 个质量为 m 的单原子分子构成的系统，忽略粒子之间的相互作用——实际上这就是理想气体的最简单的情形，则

$$H=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}mv_n^2. \tag{2.68}$$

其中速度 $v=\dot{x}$ 等于位置对时间的导数。如果把这一盒子的气体放到重力场中则，

$$H=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}m\dot{x}_n^2+mgy_n. \tag{2.69}$$

当然，如果这个盒子的高度不大，则 mgy_n 往往是一个常数，不会对分布函数造成影响。

于是，物理学家从这个分布函数开始通过完成从已知分布函数来求各个物理量的平均值的计算来得到了前面所说的所有实验定律，

$$\langle A(\vec{r}_i,\vec{v}_i)\rangle=\frac{1}{Z}\int A(\vec{r}_i,\vec{v}_i)\,e^{-\beta H(\vec{r}_i,\vec{v}_i)}\Pi_{i=1}^{N}d\vec{r}_i d\vec{v}_i. \tag{2.70}$$

至于这个计算的过程，我们就不再这里展开了。这是物理系本科阶段二、三年级的一门叫做“热力学和统计物理”的课程的主要内容之一。它需要大量的知识基础，例如微积分、概率论、力学、分析力学和量子力学。更加重要的事情是，你看到，通过假设平衡态分布函数和利用力学中已经学过的能量函数，经过数学推导计算，我们可以得到前面所说的所有实验定律，而这个假设和推导的过程以及这个过程建立起来的从假设到多个定律的知识体系体现了知识的系统化。

一个留下来的很有意思的问题是：物理学家怎么就猜出来平衡态分布函数算式 (2.66) 的？有没有可能这个分布函数本身不不用猜出来，而是可以从更加基本的原理，例如牛顿方程、薛定谔方程等运动方程得到？如果这

条路也能够走通，则物理学知识就更加系统化了。这是一个迄今为止还没有解决的问题。物理学家们已经为此奋斗了好多代了。这也正好是作者我的研究问题之一 [23]。你有没有兴趣来进一步推动这个系统化？物理学家的最终梦想（之一，还是唯一？）就是有一天所有的物理知识都从一个假设就可以得到。

当然，实际上，往往是新的实验结果引出了新的知识，而物理学家需要把这个新的知识和已有的知识联系起来，成为整个系统的一部分，或者如果完全不可能在先有知识的范围内系统化，则推翻现有的知识，构建一个既能够解释过去的从实验得到的知识又能够得到现在新的实验所要求的知识的更通用的知识系统。

当然，我们之前也提到了，这个对知识的系统性的追求，可能真的是因为这个世界的对象是相互联系的构成系统的因此描述其行为的知识也是相互联系的构成系统的，也可能仅仅是因为人类的大脑同时处理信息的容量太有限了，因此，依靠人类大脑来认识世界就迫使我们必须构建一个知识的体系，从而为了提出和解决问题，实现任何时候任何一个人类大脑只需要从很少很少的几个基本假设基本概念开始就可以得到所有的知识，而不是依靠相互不相联系的碎片化的知识来完成提出和解决问题的任务。

2.10 从力学的发展看到科学对统一性的追求

前面我们回顾了力学的发展历史——再一次强调是物理学家眼里的发展历史而不一定是真实的时间顺序发展历史，从Aristotle确定物理学的研究对象，到Galileo贡献了用实验和测量来开展研究以及具体物理知识上注意到“地面上的物体，没有力运动状态不会改变”和“自由落体运动的下落速度和重量无关”，到Kepler发现所有天体满足的天体运动的规律，到Newton的数学建模（以及微积分这个具体数学知识）和具体物理知识“力是改变物体运动状态的原因 $F = ma$”并且把它用于描述天体的运动得到了万有引力定律。

我们发现，统一性在这个过程中起到了很大的作用。第一，关于“重物下落更快”，只要能测量，我们发现有些物体满足，有些物体不满足。于是，如果我们可以通过别的方法解释不满足的，那么，我们就可以认为“重

物下落更快满足”正确；反过来，如果我们可以通过别的方法解释满足的，那么，我们就可以认为“重物下落更快不满足”是正确的。实际上，我们引入空气阻力很容易就能解释满足的情况。而反过来，不满足的情况，也就是“自由落体运动的下落速度和重量无关”得到满足的情况，就没法解释。当然，实际上，通过传说中的比萨斜塔实验，以及Galileo真实完成过的斜面的实验，就是得到了满足“自由落体运动的下落速度和重量无关”的情况。而这个情况却不能通过引入类似于摩擦力空气阻力的概念来简单地解释。于是，你看，有证据支持一个结论，这个结论的反面能够得到很好地解释，合起来就相当于这个结论有了更大的适用范围。对更大的适用范围的追求就是对统一性的追求。反过来，我们往往抛弃一个有证据支持但是同时存在不支持但是得不到解释的证据的理论。我们处理这两种理论的不同就来自于对统一性的追求。

第二，关于万有引力的研究实际上也是统一性在发挥作用。Newton从地面上的物体的运动得到 $F=ma$ 之后，试图把它推广到天体的运动上，也就是扩大 $F=ma$ 的适用范围，追求天上地下物体运动规律的统一性。这才导致了万有引力定律的发现。

实际上，电磁学的发展也类似。首先是电现象和磁现象分开研究，后来注意到两者之间的转化，于是合起来研究。接着，把描述两者的方程也统一起来，甚至方程的形式也尽可能地统一起来。甚至，这个对统一性的追求也是今天的物理学发展的目标和梦想——我们希望用一个方程可以描述所有的物理相互作用。基本的物理相互作用有四种，电磁相互作用，弱相互作用，强相互作用和引力相互作用。目前，前两者已经被统一起来（也就是，我们知道它们的来源相同，在一定条件下，它们分开各自显示为电磁相互作用和弱相互作用），强相互作用和这两者也已经在数学框架（规范场理论）上统一起来。引力相互作用还没有被纳入到这个统一的数学框架，更加不用说直接的统一。但是，这个除了用各自的理论来描述各自的现象之外的更高层次的统一性的追求一直是推动物理学发展的动力之一。

当然，反过来，也可以存在特定适用范围的理论。例如，我们知道狭义相对论和牛顿力学实际上是统一的：后者不过就是前者在物体运动速度远远小于光速的时候的近似。例如，洛伦兹变换和伽利略变换就是这样的关系。但是，由于我们在日常生活中，往往接触到的运动就是速度远远小于光

速的，所以，牛顿力学实际上在解决日常生活的问题的时候仍然适用。这个时候，尽管我们会说，原则上狭义相对论才是可以描述更多现象的理论，从对统一性的追求来说更“正确”的理论，但是，由于我们遇到的日常生活情形往往牛顿力学就够了，我们仍然把牛顿力学当作一个“正确”的理论，或者更准确地说，在物体运动速度远远小于光速的时候给出和实验足够相符的计算结果的理论。这个例子说明，一旦有了原则上统一性更高的理论，我们仍然会在一定适用范围内如果这个适用范围比较明确的话继续使用那个统一性更低的理论。并且，很有可能，未来有了新的现象，物理学家会发展出来新的更加具有统一性的理论。科学就是一门受现实启发以后不断地超越前人的具体知识的学问。

在整个物理学之内，还有一个非常普适的描述问题的数学形式——最小作用量原理。我们往往喜欢把所有的物理定理都表述为最小作用量的形式。目前为止，有关机械运动的经典力学、电磁现象的电动力学、量子现象的量子力学（原则上，量子力学不仅仅包含了对应着最小作用量的轨道，还包含了最小作用量的轨道和围绕最小作用量的轨道的其他轨道的复矢量叠加）和高速运动物体和强引力效应的相对论，都可以表述为最小作用量的形式。数学形式上的统一性的追求是物理学的另外一个统一性追求。而且，在物理学发展史上，这个统一性追求发挥了巨大的作用。可以说，一定程度上，相对论也不过就是对这个不同参考系下物理方程的表现形式相同的追求的结果。物理学家认为，数学表现形式的相同这一点，不仅仅在计算分析上有意义，可以用类似的方法，还直接就具有物理意义——这才表示物理规律在更高层次上相同。

不过，需要理解这个最小作用量原理要求比较多的数学，微积分、微分方程、泛函分析。因此，如果数学上你不能完全跟上，你就尽量看看这一节下面的部分的主要思路就可以。

以抛物运动的力学描述为例，我们以出发点为原点竖直向上为 y 轴正方向水平向右为 x 轴正方向，以原点为重力势能零点，可以写下来其运动方程，

$$m\ddot{x} = 0, \tag{2.71}$$

$$m\ddot{y} = -mg. \tag{2.72}$$

这个方程的解为,

$$x = x_0 + v_{x0}t, \tag{2.73}$$

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 + v_{y,0}t. \tag{2.74}$$

这个运动对于给定的初始条件 $x_0 = 0, y_0 = 0$ 和 $v_{x,0} = v_1, v_{y,0} = v_2$ 是完全确定的,

$$x = v_1 t, \tag{2.75}$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_2 t. \tag{2.76}$$

顺便，我们可以验证，如果我这样来给运动满足的条件——给定初始时刻的位置和结束时刻的位置，而不是通过初始位置和速度，则也是确定的,

$$x(0) = x_0 = 0, \tag{2.77}$$

$$y(0) = y_0 = 0, \tag{2.78}$$

$$x(\tau) = x_E, \tag{2.79}$$

$$y(\tau) = y_E. \tag{2.80}$$

可以得到,

$$v_1 = \frac{x_E}{\tau}, \tag{2.81}$$

$$v_2 = \frac{y_E + \frac{1}{2}g\tau^2}{\tau}. \tag{2.82}$$

习题 2.8 (确定抛物运动的两组条件)**.** 对于抛物运动，证明，如果给定初始时刻的位置和结束时刻的位置，则相当于给定初始位置和初始速度。

现在,我们换一个角度用基于动能和势能的Lagrangian来描述这个抛物运动,

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \tag{2.83}$$

$$E_p = mgy, \tag{2.84}$$

$$L = E_k - E_p = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy. \tag{2.85}$$

然后，我们说整个抛物运动不再从 $F = ma$ 来定义了，而是要满足下面的一个叫做作用量的物理量在真实运动——记作轨道 $\vec{x}^*(t)$——中最小，在给

定的初始时刻的位置和结束时刻的位置的条件下，

$$\delta S = S\left[\vec{x}^*(t) + \delta\vec{x}(t)\right] - S\left[\vec{x}^*(t)\right] = 0 + \mathscr{O}\left(\delta^2\vec{x}(t)\right), \tag{2.86}$$

也就是，作用量对轨道的变化的一阶导数为零[29]，其中作用量 S 定义为

$$S = \int_0^\tau dt L(t). \tag{2.87}$$

下面我们来证明这个条件下得到的运动方程和从 $F = ma$ 得到的完全等价。

$$\begin{aligned}
\delta S = & \; S\left[\vec{x}^*(t) + \delta\vec{x}(t)\right] - S\left[\vec{x}^*(t)\right], \\
= & \int_0^\tau dt \left\{\left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^* + \dot{\delta x}^2 + \dot{y}^* + \dot{\delta y}^2\right) - mg\left(y^* + \delta y\right)\right] - \left[\frac{1}{2}m\left(\dot{x^*}^2 + \dot{y^*}^2\right) - mgy^*\right]\right\}, \\
= & \int_0^\tau dt \left\{\left[\frac{1}{2}m\left(2\dot{\delta x}\dot{x}^* + \dot{\delta x}^2 + 2\dot{\delta y}\dot{y}^* + \dot{\delta y}^2\right) - mg\delta y\right]\right\}, \\
= & \int_0^\tau dt \left\{m\dot{x}^*\dot{\delta x} + m\dot{y}^*\dot{\delta y} - mg\delta y\right\} + \int_0^\tau dt \left\{\frac{1}{2}m\dot{\delta x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\delta y}^2\right\}, \\
= & \int_0^\tau \left\{m\dot{x}^* d\left[\delta x\right] + m\dot{y}^* d\left[\delta y\right] - mg\delta y\right\} + \mathscr{O}\left(\delta^2\vec{x}(t)\right), \\
= & \; m\dot{x}^*\delta x\,|_0^\tau + m\dot{y}^*\delta y\,|_0^\tau - \int_0^\tau dt\left\{m\ddot{x}^*\delta x + m\ddot{y}^*\delta y + mg\delta y\right\} + \mathscr{O}\left(\delta^2\vec{x}(t)\right), \\
= & -\int_0^\tau dt\left\{m\ddot{x}^*\delta x + \left[m\ddot{y}^* + mg\right]\delta y\right\} + \mathscr{O}\left(\delta^2\vec{x}(t)\right).
\end{aligned}$$

注意，我们要求所有独立变化的一阶项前面的系数为零，也就是

$$\{m\ddot{x}^*\} = 0, \{m\ddot{y}^* + mg\} = 0. \tag{2.88}$$

这正好就是 $F = ma$，

$$\ddot{x}^* = 0, \ddot{y}^* = -g. \tag{2.89}$$

这里的一阶系数为零的条件也可以直观来理解：如果系数不为零，对于给定的轨道 x^*, y^*，总可以选择偏离的轨道满足 $\delta x \propto m\ddot{x}^*$，$\delta y \propto \left(m\ddot{y}^* + mg\right)$，于是只要不是给定的轨道 x^*, y^* 处处都有 $\ddot{x}^* = 0 = \ddot{y}^* + g$ 则积分号内总大

[29]从微积分的学习中我们知道极值对应着函数对自变量的一阶导数为零。这里轨道当作自变量，或者说把时间点离散以后就是好多个自变量，于是极值条件仍然是偏导数为零。

于零。因此由于整体有一个负号则积分整体小于零。也就是说，可以偏离轨道以后使得作用量更小。矛盾。

对于更一般的受力 F 作用下的运动，我们也可以证明作用量取做小值和 $F = ma$ 等价。不过，那个证明就需要用到泛函分析的知识来从最小作用量原理推导出来关于Lagrangian的Lagrangian 方程了。在这里我们跳过。

如果这一段的数学推导不能一步一步跟着算出来，一方面你可以去学点微积分，另一方面，你只要相信这真的是能够算出来的就行了。也就是说，只需要留下一个印象——牛顿力学的核心公式 $F = ma$ 和最小作用量原理等价。用基于动能和势能的组合 $L = T - V$ 的最小作用量原理有什么优势呢？我们再也不用去做受力分析了。对于有多个物体相互作用的系统，受力分析是一个非常复杂的问题。例如，在连杆链接的齿轮等机械上，在桥梁等场景下。反而动能和势能比较容易写出来。据说，Lagrange自豪的地方就是他的力学书里面没有任何一张受力分析图。我强烈推荐你去试试用受力分析的方法和这个Lagrangian的方法分别求出来单摆和二级摆（有两个连起来的摆锤）的运动方程[30]。你会发现真的，受力分析太复杂了。

有了这个力学上的最小作用量原理的成功的体验之后，物理学家们就提出来，是不是电磁学、光学、统计物理学、量子力学、经典和量子场论等等各个物理学分支的核心描述都可以转化为最小作用量的形式。在得到这些个一个个分支学科的最小作用量的描述之后，甚至进一步，是不是可以把这些系统的最小作用量某种意义上写道一起，就自然统一起来了。你看，拥有相同的数学形式的理论才能更容易统一起来。因此，最小作用量的形式的统一描述对于物理学对统一性的追求是非常重要的，尽管我们还没有完全实现这个把所有的物理基本相互作用用一个Lagrangian的梦想。

2.11 科学的简单性原则

前面我们讨论了科学对统一性的追求，也就是尽可能地用最少的定义、假设、命题、计算分析方法来解释最多的现象。就算之前，某个现象已经有了自己的定义、假设、命题、计算分析方法来解释，如果可以和解释其他现象的定义、假设、命题、计算分析方法联系起来，那我们还是希望联系起来，

[30]你可以参考Lev Landau（列夫 · 朗道）的《力学》[24]。

这样就减少了所需要的独立的定义、假设、命题、计算分析方法的数量。简单性和统一性其实很象，但是往往针对的同一个现象而言的：对同一个现象如果存在两个不同的解释或者说描述，这两个解释或者描述的复杂性如果有明显的区别，则我们选择简单的那个。

比如说，关于打雷和闪电的理论可以是雷公电母，也可以是云层放电[31]但是，如果我们对所有的打雷和闪电的现象都做一个记录，就会发现，雷公电母这个解释需要附加很多的条件，诸如，雷公每次都得约上电母一起（才能解释两者同时发生），雷公电母特别喜欢下雨天来约会（来解释往往打雷和闪电后面跟着下雨），但是也不是每次都是如此（来解释有的时候干打雷不下雨）。如果我们进一步注意到，其实，冬天晚上脱毛衣也会导致小规模的打雷和闪电，那就更麻烦了，意味着，普通人也可以把雷公电母召唤出来，并且不需要提供贡品。如果你去科技馆，往往就能看到高压放电带来的打雷和闪电，那也就是说，高压电也可以召唤雷公电母，并且好像有无穷多个雷公电母才能应付过来我们随时的召唤。之前，我们从可证伪性来讨论了用雷公电母来解释打雷和闪电的不合理性。现在，我们换了一个角度：这个理论太复杂了，我们需要给雷动电母做一大堆设定才能做到这个理论可以解释所有的打雷和闪电的现象。原则上，科学还得保证这些设定之间没有相互冲突的地方。也就是用来解释现象的理论内部没有自相矛盾的地方。不过，前面我们已经把这一条算到统一性的一部分了。

反过来，云层放电的解释呢，就很统一很简单，背后不过是两种不同电荷在电荷量足够大的情况下击穿了中间的电荷不两导体介质，例如空气，而产生了放电现象；其中闪电就是击穿和放电的路径，雷声就是击穿的时候发出的声音。于是，我们发现，冬天晚上脱毛衣也会导致小规模的打雷和闪电也就能得到解释，静电产生了不同性质的电荷的聚集然后击穿空气放电。

实际上，Copernicus的日心说为什么没有在当时取代Ptolemy的地心说就有简单性方面的问题：两者都需要大圆套小圆，尽管日心说需要的圆的数量稍微少一点。那Kepler的椭圆轨道日心说为什么就能成功取代Copernicus的

[31]更完整的解释，得考虑云层如何会携带不同的电荷，以及带电荷的云和地面之间如何发生放电现象，还有放电现象为什么会带来闪电和雷声。不过，在这里我们不关心这个细节。

日心说和Ptolemy的地心说呢，其中一个很重要的原因就是Kepler的椭圆轨道日心说不再需要大圆套小圆了，仅仅把美学和哲学意义上更完美的圆轨道改成不够完美但是数学方程其实和圆基本一样的椭圆轨道就可以。

我们今天看到的电磁学理论是电场和磁场的形式的，其核心是麦克斯韦方程。但是，当Maxwell自己最初构建的电和磁的现象的理论是机械力学 [25] 的：在那里，人们需要转子和皮带来构建电和磁现象的模型。后来，Maxwell构建了仅仅需要数学方程而不再需要理解这些数学方程的机械力学结构 [26] 的理论来解释电和磁的现象，也就是我们今天所熟悉的麦克斯韦方程。是的，也许从所谓的直观理解上来说，可能电和磁现象的机械力学模型更简单，但是，一旦我们接受了微分方程以及电场、磁场的概念，我们发现，再也不需要引入机械力学装置的电和磁现象的理论反而更简单。

顺便，这也说明，简单性的判断不是一个非常简单的问题。有了更加抽象的数学工具了，可能使得我们的理论描述更加简单，但是可能就不再能通过所谓的直观来理解了，似乎更加复杂了。在物理学上，只要我们人类的脑袋可以学会去操作和应用它，我们往往不在乎这个数学结构是多么地抽象。

有的科学家，例如Einstein会把科学的简单性往前再推进一步，认为：只有简单的东西才是科学的。也就是说，如果描述和解释一个现象的理论非常复杂，那么，这个理论就不是这个现象的最终的理论。但是，很有可能，有些现象就是复杂的，其描述和解释也是复杂的。当然，也有可能Einstein是对的，那是因为这个现象的真正的描述和解释方式还没有找到。因此，为了避开这个讨论，在这里，我们仅仅要求到前面那个意义上的简单性：如果同一个现象有多个复杂程度不同的理论，则我们选择那个更加简单的理论。

不得不指出来，在这里，我们有意无意地漏过了一个问题：一个模型或者理论的复杂程度的度量。如果我们想真的来使用简单性原则来约束科学，则，我们必须给出来复杂性的度量方式。暂时，我们先略过这个问题，仅仅从某些经验和直觉的角度来比较不同理论的复杂程度。

2.12 科学家精神

We make our world significant by the courage of our questions and by the depth of our answers.

我们通过我们提出问题的勇气和给出的答案的深度来使得这个人间值得。

– Carl Sagan

在《伽利略传》[27] 中，主角Galileo（注意不是真的Galileo啊）在总结自己一生，反思自己为了避免肉体上更大的痛苦而背叛了科学的经历是，说了一句话“追求科学，需要有特殊的勇敢”。

这不是一句空话。Copernicus生前的谨慎——直到去世前猜出版其《天体运行论》[28]——确实让他个人避免了被宗教围剿，但是，其逝世之后这本书仍然被禁，其学说也被禁止传播。大力传播日心说的Giordano Bruno（乔尔丹诺 · 布鲁诺），尽管还有别的原因，被教会烧死。Galileo被宗教裁判所审判并背叛有罪。他不得不承认自己在没有充分证据的情况下，将日心说作为事实写在书 [10] 里面做了推广，尽管实际上他当时确实没有找到足以证明日心说——也就是地球在动——的证据。但是，这些都是仅仅因为某个学说和宗教信仰的某些教条不相符而已。并且，实际上，当年地心说本身的发展并不是为教会服务的，反而是后来被教会采纳的而已。不过，被各种势力迫害仅仅是科学家需要勇气的一方面。

科学家更需要勇气的地方是对过去的权威结论的挑战，无论从思想上还是智力上的挑战，都需要莫大的勇气，以及毅力和能力。例如，Kepler在穷困潦倒的一生中坚持探索Tycho的天体运动观测数据背后的规律，而且是突破了前辈提出和宗教拥护的地心说、突破之前每一个天体运动的研究者甚至数学家哲学家从美的角度来坚持的圆轨道。例如，Galileo对力是维持运动的原因以及重物下落更快的突破，以及更进一步的从思辨到做实验和作计算推理的突破。例如，Einstein的相对论对“同时”的概念和伽利略变换的突破，以及他的光量子理论对经典电磁学的突破。每一个重大的科学突破都是对前人建立的结论、理论或者研究方法的突破，而这些突破的每一个都需要莫大的勇气。不过，幸好，科学的知识本来就是用来给下一代人突破的，只要坚持科学研究方法和科学精神。

科学家还需要面对难题的勇气，只要符合科学研究方法和科学精神就算不被理解还要坚持的勇气，甚至想不清楚问题还要不断坚持去想面对自己短期（可能还不短）内的失落的勇气。例如，Ludwig Boltzmann（路德维希 · 玻尔兹曼）提出了描述给定温度下系统能量的分布函数的Boltzmann 分布已经是了不起的科学贡献。但是，由于这个分布不能从牛顿力学方程里面直接推导出来，其不得不提出Boltzmann 方程来给出Boltzmann 分布可能的根源。但是，由于Boltzmann一直解决不了直接从牛顿力学方程里面推导出来Boltzmann 方程的问题，备受煎熬，自杀身亡。

当然，科学家一旦探索成功，那是一种莫大的深刻的可以一直持续到永远的快乐。例如，传说中，Archimedes（阿基米德）解决了浮力和排开水的体积的关系的时候忍不住喊出来的“尤里卡 (Eureka)”。例如，Kepler找到周期和半长轴关系也就是其第三定律的时候，感叹“终于找到了”，于是可以去解决其和家人现实生活的问题了 [13]。例如，Einstein一直在寻找统一物理学的理论支持了他尽管没有找到也坚持一辈子去寻找。这是展示人类智慧的巨大创造的责任和机会，也是为人类解决问题的机会，更加是使得自己的人生值得过的机会。通过科学研究我们找到自己。这也算是少数人能够享受的美丽。或许让更多的人能够享受这个美丽或者至少欣赏和共情其他人对这个美丽的享受，也是我做教育的原因。我还记得我自己在墨西哥旅游的时候在餐巾纸上发现方程封闭的时候的快乐。它支撑了我直到今天以及估计这一生的研究的热情和底气。我也还记得我花主要时间做教育的初心——改变教育，让世界更美丽。我很开心，不知道什么原因，我具有了这些莫大的勇气。

甚至，当科学家还需要直面自己的研究成果被批评和直接批评他人的研究成果的勇气。科学知识固然是一直等者下一代人去推翻的，但是，科学共同体对于被推翻是非常严格的，一定会从各个角度来质疑一项宣称推翻了什么之前的科学知识的工作，而且也需要每一个科学家自己来这样严格要求别人的科学研究工作，而不仅仅是自己的。我很开心，我也具有了这个勇气。

因此，科学家精神，就是在坚持科学研究方法和科学精神的前提下，不服就干，勇闯无人区。这是值得过的人生。

2.13 经验主义和科学的可证伪性

我们在前面通过Galileo的研究工作对物理学对科学发展的意义的讨论中，已经看到了，任何科学知识，任何科学研究，都要从测量开始，也就是经验和体验所基于的世界开始。这也是Bacon的“经验主义”的核心理念。那么，是不是不基于经验，完全基于逻辑演绎就不能创造新知识了呢？

这个问题比较复杂。第一，如果在求解问题的部分运用逻辑演绎，找到了新的求解方法，或者发现了现有理论中的漏洞，补上了这个漏洞，这也算创造了知识。但是，这里的创造其实更像是数学意义上的创造知识。因此，如果有人非得说这不算创造科学知识，也说得过去。第二，在逻辑演绎和想象力的结合下提前创造了某个模型某个概念，提出了某个问题，算不算创造新知识？一旦未来被实验也就是被经验世界检验，通过了，算科学知识。第三，如果真的就是完全依赖于逻辑推理，希望超越当前的理论，而不是修修补补，也不是猜测，那确实是不太可能成功的。例如，量子力学之所以被发展出来并且超越了经典力学，实际上主要是量子系统的行为给科学家带来的启发和挑战。那，相对论对牛顿力学的超越呢？是不是基本就来自于Einstein的逻辑推理呢？是以及不是。从Einstein个人来说，确实主要是来自于逻辑推理：电磁波的麦克斯韦方程给出的电磁波的速度和Galileo变换冲突的问题，迈克尔逊 - 莫雷实验 (Michelson-Morley Experiment) 挑战了以太的存在或者挑战了电磁波传播速度的Galileo变换，受Ernst Mach（恩斯特 · 马赫）对绝对时空间的哲学批判而坚持相对性原理——任何惯性参考系内物理规律的数学形式相同——的启发，以及后来的惯性质量和引力质量的问题。但是，我们要看到，电磁波的麦克斯韦方程本身是基于经验世界的，并且当时已经有实验直接挑战了Galileo变换；光速不变性不仅仅是电磁波的麦克斯韦方程的推论也是实验结果。因此，除了数学研究、科学上修修补补的研究或者计算方法论的研究、超强想象力和前瞻性指导下的研究，可以认为，完全依靠逻辑思维不能创造新知识。

那么，是不是基于经验，作总结归纳就可以得到科学知识了呢？我们也已经看到，要进行概念建模和数学建模，要做实验检验。当然，在数学建模之后还要完成数学计算推理，而在那一步中，我们需要运用演绎逻辑。因此，科学研究方法本身已经是经验主义和逻辑主义的结合。那能够通过实验检验的概念和数学模型，总应该算是科学知识了吧？在科学家实际工作

的层面而言，我们往往采用这个标准，也就是所谓的科学的通过实验检验的标准。

但是，Popper对这个科学研究中的常用标准提出了进一步的挑战：是不是通过了一个实验的检验就算通过，算科学知识了，如果一个不够要通过多少个，能确定一个数量吗？我们发现，实际上，从纯逻辑上，就算我们某个概念和数学模型通过了一万次的实验检验，也不表示，它会完全通过第一万零一次的检验。甚至是一模一样的检验都保证不了这一条，更何况还要考虑到概念和数学模型本来就该适用的条件稍微变了的场景的实验检验。

因此，Popper提出来科学知识的另一条标准——可证伪性，也就是一个科学知识必须是一个可证伪的但是迄今为止还没有被证伪的命题。一个关于现实世界的对象的概念模型和数学模型，只要是原则上就可以通过实验来证明其可以是错的，就说它具有可证伪性；对于一个可证伪的概念模型和数学模型，只要迄今为止做了一些实验检验但是仍然没有被证伪，我们就认为它是科学知识的一部分。

例如，"上帝是存在的"没法被证伪，因为我们不知道如果出现了什么事情，上帝就不存在了。如果这样的事情能够被提出来，还原则上可以出现，那么，我们只要去观察这样的事情是否真的出现就行了：出现了，则上帝不存在；观察了很多很多次，迄今为止就是没有出现，则暂时就接受上帝存在。例如，"心诚则灵"是不能被证伪的，因为其检验方式就是去看看灵不灵，也就是有没有效果（假设这个是可以测量的），但是，如果检测到有效果呢，我们就会说，"嗯，那是因为心诚"，如果观察到效果不显呢，就说，"那是因为心不诚"。因此，我们永远也没有办法从实验检验来反驳"心诚则灵"。于是，它就是天生不能成为科学知识的。除非，除非我们可以单独来定义和测量"心诚"：例如，我们可以直接观测大脑活动，找到大脑活动中体现心诚的典型脑活动，那我们就有了两个可以独立测量的变量，我们再来看这两个变量之间是否存在很强的相关性，就可以来检验这个命题。

在理解了科学的可证伪性标准之后，我们在实际科学研究中往往还是会用"某某理论通过了实验检验"这样的表达。这个时候，我们的理解原则上应该表达为：这个理论是可以被证伪的，但是这次实验没有证伪它，从而增加了这个理论就是科学知识的可能性。因此，Popper的理念和逻辑，我

们是要懂的，但是实际研究中，我们可以用稍微不严格一点“通过了实验检验”的说法。

2.14 科学知识的理论和学习以及创造知识

最近讲课过程中，遇到了不少学生对于什么是概念没有认知。他们只会给具体的概念从权威材料里面找到所谓的定义，然后，就把这个定义的含义甚至这个定义所用的具体的语言表达形式逐字地当作圣经。还有的同学，对于自然语言中的字和词的含义和学科中的概念的联系和区别没有认知。本质上，这就是对知识是什么没有认知。其实，在 IB（International Baccalaureate）国际教育课程体系里面，知识论（Theory of Knowledge）是一门从头贯彻到尾，并且开设专门的课来学习的课程。之前，由于我自己的物理学和数学的背景，我把对知识的理解当成了自然的天然的（因为在物理学和数学的学习中，自然地体现和渗透知识论）。但是，遇到了前面的问题之后，忽然意识到，我想当然了。知识论对于很多学生是一个需要学习的，专门学习和渗透学习结合。因此，在本书中，专门增加了一个知识论的章节。同时，由于本书的主题是系统科学，因此我们在这里仅仅关注科学知识，这一节就成了关于科学知识的知识，也就是科学知识的理论（Theory of Scientific Knowledge）。

所有的科学知识的基本单位是概念和命题。其中命题是概念和概念通过关系连词相连构成的判断句。因此，所有科学知识的基础都是概念。例如，“三角形由（同一平面内的）三条线段首尾相连构成”给出了三角形的概念，基于线段的概念，“直角三角形是有一个角是直角的三角形”给出了直角三角形的概念，基于直角和三角形。“任意一个三角形，其内角和肯定是 180°”是一个命题，建立了“三角形”和“内角和是 180°”之间的关系（前者是后者的充分条件）。“直角三角形满足三边关系 $a^2+b^2=c^2$（直角边平方和等于斜边的平方）”给出了“直角三角形”和“三边关系 $a^2+b^2=c^2$”的关系（前者是后者的充分条件）。

那么，更一般地来说，在具体的概念和命题的层次之上，什么是概念，什么是命题呢？也就是概念和命题的概念性定义是什么呢？

概念可以通过内涵或者外延来定义。外延上，概念可以通过集合来定

义[32]，或者说概念就是一个集合。集合要求具有确定性——对于任意给定的对象，我们可以判断这个对象是否属于这个集合。例如，所有的整数是一个集合，是一个概念，称为整数集合，或者简称整数，因为给定任何一个数，我们可以判断其是否是整数。所有的秃头不是一个集合，不是一个概念，因为我们没法判断一个多少根头发以下的人才是秃头。从正整数集合中，从零开始，隔一个选定一个，组成的也是一个集合。例如 3 肯定不属于这个集合，但是 4 肯定属于这个集合。一个概念的内涵就是把这个概念对应的集合中每一个元素的共性总结出来。例如，“正整数集合中，从零开始，隔一个选定一个组成的集合”是非负偶数，也就是能够被 2 整除的非负数。这里的能够被 2 整除就是这个集合的元素的共同特征，再加上约束在更大的集合非负数之内，我们就有了集合的内涵定义“能够被 2 整除的非负数”，我们称之为“非负偶数”。用数学符号，我们可以记作 $\{2n|n=0,1,2,\cdots\}$。

那么，什么是命题呢？命题就是两个已经定义清楚的概念之间存在某关系的论断，并且，我们要求，命题就是成立或者不成立的两种情况只能取其一并且必须取其一。例如，“任意一个三角形，其内角和肯定是 180°”只能成立或者不成立：如果存在一个三角形其内角和不等于 180°，则这个命题就不成立；否则，也就意味着所有的三角形其内角和都等于 180°，则这个命题成立。注意，这里的“否则”就说明这两个可能性互补——两者不可能同时成立，两者必然有一个成立。也就是说，原则上，在所有的三角形中，必然只包含这个结论成立和这个结论不成立的情形，不能再有其他的情形，而且这两个情形不可能同时成立。用集合的语言来说，那就是，如果我们定义所有的内角和等于 180° 的三角形组成一个集合，记作 $\triangle_{180}$，定义所有的内角和不等于 180° 的三角形组成一个集合，记作 $\triangle_{1\bar{8}0}$，则，这两个集合不相交，交集为空集 $\triangle_{180}\cap\triangle_{1\bar{8}0}=\phi$（不能同时成立），并且这两个集合合起来等于所有三角形的集合，也就是并集为三角形全集 $\triangle_{180}\cup\triangle_{1\bar{8}0}=\triangle$（所有三角形必须属于这两个集合之一）。然后，“任意一个三角形，其内角和肯定是 180°”这句话，说的是 $\triangle_{180}=\triangle$，也就是 $\triangle_{1\bar{8}0}=\phi$。

合起来，我们看到，本来就有 $\triangle_{180}\cap\triangle_{1\bar{8}0}=\phi$ 和 $\triangle_{180}\cup\triangle_{1\bar{8}0}=\triangle$，但是，“任意一个三角形，其内角和肯定是 180°”告诉我们 $\triangle_{180}=\triangle$，也就是 $\triangle_{1\bar{8}0}=\phi$。这增加了我们的信息。因此，“任意一个三角形，其内角和

[32]集合本身如何定义我们暂时先不管它。

肯定是 180°” 不仅仅是一个命题，还是一个增加了我们的知识的命题。

我们看到，一个命题只能有成立和不成立两个状态，两者只能选其一，而且必然选其一。命题的背后，也是集合——一个是满足这个命题也就是使得这个命题成立的对象构成的集合，一个是不满足这个命题也就是使得这个不命题成立的对象构成的集合。并且，这两个集合不相交而且构成所有这一类对象的全集。

好了，我们已经看到，定义和命题都是基于集合来定义的。定义的内涵表达，不过就是对集合中元素的共同特征的提炼，概念的名称名词不过就是给这个集合一个记号。对于命题，我们也经常给一个名称记号，例如“直角三角形满足三边关系 $a^2 + b^2 = c^2$” 就被称为勾股定理或者Pythagoras 定理，“任意一个三角形，其内角和肯定是 180°” 被称为三角形内角和定理。

既然命题不过就是元素确定的集合，我们还可以把命题看作概念，命题的名称看作概念的记号，来看命题和命题之间的关系。例如，我们实际上就可以从勾股定理来推导出来三角形内角和定理，反之亦然。于是，“只要勾股定理成立则三角形内角和定理成立”就成了一个命题，“只要三角形内角和定理成立则勾股定理成立”也是一个命题。因此，命题可以是嵌套的。

习题 2.9 (命题判断题)**.** *请思考下面的句子是不是命题，如果是，是否成立，或者如何去检验或者论证其成立还是不成立：“秃头是坏人”，“人是要死的”，“花是美丽的”，“兔子是可爱的”，“吴金闪是瘦的”，“吴金闪的体重小于 1000 斤”。*

有了集合、概念、命题这几个概念之后，我们就可以来说明科学知识是什么，科学研究是什么了。为此，我们要引入三个世界的概念：现实世界，概念世界和语言世界。以物理学为例，现实世界就是那些非生命的物体构成的世界，或者说物理学的典型研究对象构成的世界。当然，在不同的时代，甚至不同的人那里，这个世界所包含的具体对象可能是不同的。不过，在某一个时刻的某一个人那里，其包含的具体对象按道理是明确的。然后，如果有必要，例如需要在不同人之间相互交流物理学知识的时候，我们尽量把绝大多数人都认同的对象，也就是大多数个体的集合的交集，取出来，当作那个时刻的公认的物理学所研究的现实世界。不过，本质上，只要每一个个体自己是明确的，就可以。你的物理学所研究的现实世界和我的物理学所研究的现实世界不同，原则上，毫无问题。当然，如果你我之间要做交

流，则最好相同，或者相差不大，或者搞清楚了彼此的差异。因此，我们把现实世界当作是一个概念，指代对象明确的集合。

那概念世界是什么呢？就是对现实世界中的对象做一个个的子集，把这些子集称为概念。然后这些概念所构成的集合，就称为概念世界。注意，概念原则上只需要有外延，也就是每一个子集的元素是明确的就可以，而不需要找出来其内涵的表达，甚至给这些概念名字。但是，为了自己思考的方便，以及为了交流方便，我们通常会给出来一个定义的内涵表达以及给一个名称或者符号。那么，是不是所有的子集都会成为我们的概念呢？不是的。例如在整数中，我们大约有正整数，非负整数，被 $2,3,4$ 甚至任意的整数 n 整除的数，完全平方数等等这些常见概念。我们很少给 $\{1,2,4,5,7\}$ 这样的子集一个专门的名称。如果你需要，我可以强行来找出来一个内涵定义和给一个名称，例如“7 以内不能被 3 整除的正整数”，记作 $n_{\bar{3},<7}$，叫做“七内非三倍数”，甚至叫做“七非三”。那为什么有些子集会成为一个学科发展之后预先定义好的概念，而有一些不会呢？这取决于这些概念是否经常用来构成命题，这些所构成的命题是否经常用来描述现实世界[33]。我们也说了，命题也是概念，命题之间用关系相连构成的命题仍然是命题，因此也是概念。这个概念的集合，同时也就包含了概念之间的关系，就称为概念世界。

那什么是语言世界呢？概念的名称和记号，以及它们结合日常语言之后来构成的语句，其集合就是语言的世界。例如，尽管本书是在阐述概念世界里面的事情，但是你现在直接看到的是我所要表达的含义在语言世界里面的表现形式[34]。

有了这三个世界，我们来看看，通常所说的学知识是发生在哪一个或者哪些世界之中的？最粗暴的学习是仅仅发生在语言世界中：我们从接收书本上或者其他人用语言所传递的信息中，学会了概念的名称，学会了命

[33]如果你在纠缠数学中是否有必要把概念世界联系到现实世界的问题，注意，第一，我们仅仅关注科学知识，而严格来说，数学不是科学；第二，实际上，数学的很多概念，在被物理学等科学所用的时候，往往都能找到现实世界的对应对象，以及反过来可以把数学概念看作是对现实世界的对象的抽象。

[34]或者，把本书的印刷版当作你直接看到的对象，而不是我所要表达的语句的话，那么，你看到的是我所要表达的含义在语言世界里面的表现形式的物理形式——印刷成了白纸黑字。不过，我们跳过这个形式，假装直接看到了本书的白纸黑字所要表达的语言的内容。

题的语言表达，于是，我们可以去参加考试，可以去重复那些命题，完成填空题，判断题。我们根本就不需要把语言世界中这些概念的名称和记号对应到相应的概念世界中去，更不用说从概念世界再对应到相应的现实世界中去。这其实就是自然语言处理算法和大语言模型的学习方式：只需要提供语言世界的学习材料，自然语言处理算法和大语言模型就可以学会看起来很象很象人类在说话。其背后，是通过了大量语料的训练，得到了一个很好的从给定的词或者句来预测下一个词的模型。

但是，原则上，人类不是这样创造和学习知识的。首先，在概念的名称和记号被发明出来之前，人类没法这样纯粹通过语料来学习，因为这个概念所对应的名称和记号本身还没被创造出来呢。当然，你说，人工智能领域的自然语言处理算法和大语言模型本身的预测下一个词的随机性会不会导致其“创造”出来的某些词正好包含人类未来要创造的概念的名称和记号。这倒也不是完全不可能，但是，那也是偶然的。就算偶然撞到了，也非常不可能（可能性不完全等于零，几乎为零）自然语言处理算法和大语言模型对这个创造出来的词给一个定义，也恰好是我们人类未来要创造出来这个概念的时候所要的内涵表达。或者，就算就算这个偶然性也遇到了，那这个名称和内涵表达也不会正好对应着人类未来要创造出来这个概念的时候所要的外延，因为外延是在现实世界之中的，而自然语言处理算法和大语言模型只活动在语言世界中。其次，人类真正的学习，也不是仅仅活动在语言世界之中的。我们学习到一个概念的名称的时候，就会联系到这个概念在概念世界的含义，例如这个概念和其他概念和命题有什么关系，然后进一步联系到这个概念在现实世界中的外延。甚至，我们可以采用“创造体验式学习”[1]，先在现实世界中提出一个问题，或者观察到一个现象或者模式、规律，然后，我们来回答这个问题，或者命名或解释这个模式，从而在回答问题或者解释模式的过程中，自己把所需要的概念创造出来，走通“从外延的确定，内涵的提炼，名称或者记号的选择，到确定这个概念和其他概念和命题的关系，直到解决了问题或者解释了模式”的整条道路。因此，我们人类学习者在学习和创造过程中，自然地是在现实、概念和语言三个世界中穿行的，而不仅仅是活动在语言世界中的，如图 2.15。

如果有一天，我们把人类在三个世界中穿行的例子，也就是知识创造和创造性使用的案例，做成训练素材，然后帮助人工智能学会从现实世界

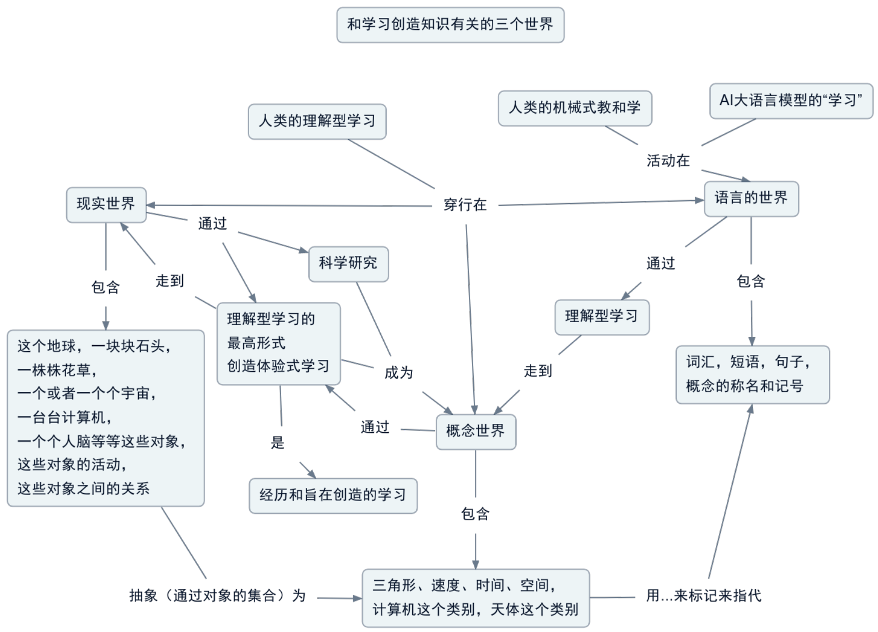

图 2.15: 人类学习和创造知识时穿行的三个世界。只有最简单粗暴的人类学习以及当前的人工智能的学习是在语言的世界中转圈圈的。

中抽象出概念，给概念一个符号到语言世界，通过操作语言世界的对象来辅助对概念世界的东西展开思考，从概念世界中得到的结论回到现实世界，那有可能人工智能也就真的能够全面取代人类的学习和创造了。这可以被称为基于 System II——理性思维渠道 [29]——的人工智能。至少在目前以 System I——植物神经系统不断地试错的人工智能来看，是不可能的。

小结一下，人类在创造知识的时候，是在现实世界、概念世界和语言世界中穿行的，所以，我们在为了创造知识和创造性使用知识而学习知识的时候，也需要在这三个世界中穿行。概念和命题都是基于集合来定义的。概念的要求就是外延明确，也就是集合的要求。概念是在概念世界之中的，但是其在语言世界中有自己的名称和记号，其外延是在现实世界之中的。命题是概念和概念之间可以判断是否成立的关系。命题也可以看作概念，于是，命题之间的关系就成了命题。在科学知识中，一个命题是否成立，必须既能够通过逻辑的检验还能够通过实验的检验。概念是否值的提出，除了其内涵提炼得是否和其外延的共同特征相符之外，还取决于这个概念提出

以后是否参与命题，这个命题是否可以回到现实世界和现实世界相符。

那么，我们如何来做这样的在三个世界中穿行的学习呢？我们需要每次都完成在不同的知识的层次之间的上下贯通，以及同一层次的知识之间的左右贯通，我们还需要以高层知识生成器为目标。那，什么是知识的层次，什么是高层知识生成器呢？下面，我们来不补充这几个概念。更详细的阐述见吴金闪的《教得更少，学得更多》[1] 以及《教育为什么需要系统科学》[30]。

如图 2.16，我们把知识分成了一个 $0+5$ 个层次。第零层是经验和体验。例如，在我们知道三角形之前就玩过了三角形，有了关于三角形的经验和体验。在我们学习数学中的数之前，就有了在生活中和日常语言中使用数的经验和体验。第一层是事实性程序性知识。例如，中国首都是北京，中国最长的河是长江，二二得四等称法口诀，两位数乘法步骤（需要先把第二个数得个位数乘到第一个数得每一位上，乘的时候运用称法口诀，有进位要进位以及处理进位法加法，然后把十位数乘到第一个数上重复这个步骤，最后把个位数和十位数乘出来得结果对齐——十位数得结果往前错一位——相加)。第二层是学科概念知识。例如，三角形是三条线段首尾相连构成的，加法是合起来数一数，乘法是重复多次的加法。注意，我们在学习的时候，不是直接学习学科概念层的，更加不是学习学科概念层的定义的文字的。如果这样，那就是在语言的世界里面转圈圈了。

那么，我们是怎么学的呢？为了学习学科概念，我们需要从经验和体验做一个抽象提炼。经验和体验正好就是关于现实世界的“前知识”。我们需要走到概念世界来，也就是提炼出来概念。甚至进一步明白为什么需要提炼出来这样的概念——为了回答某个问题，如何提炼——先确定外延再确定内涵最后确定内涵的语言形式。如果前人已经做了这样的提炼，则我们要像模像样地重复一下前人创造这个概念的过程，也就是在三个世界之间穿行的过程。如果前人还没有做好这样的提炼，那正好这就是科学研究工作。然后，从第零层到了第二层之后，我们再回到第一层——通过学科概念来得到事实性程序性知识。例如，我们有了四则运算律和数的数位表示（$13=1+3$，以及更一般地 $ab=a\times 10+b$）就可以很容易地得到两位数乘

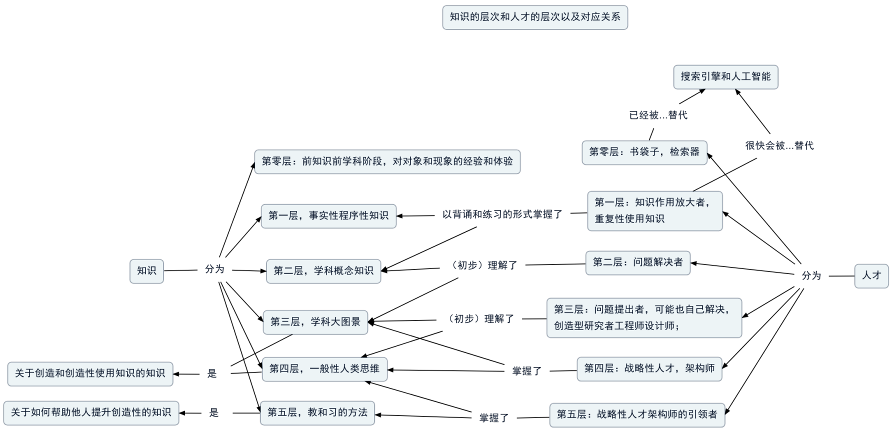

图 2.16: 知识和人才的层次。为了培养创造和创造性使用知识的人，欣赏知识的创造和创造性使用的人，我们教和学需要以高层知识生成器为目标。

法的计算流程，

$$
\begin{aligned}
&(a\times 10+b)\times(c\times 10+d)\\
=&(a\times 10+b)\times c\times 10+(a\times 10+b)\times d\\
=&a\times 10\times c\times 10+b\times c\times 10+a\times 10\times d+b\times d\\
=&a\times c\times 100+(b\times c+a\times d)\times 10+b\times d. \qquad (2.90)
\end{aligned}
$$

也就是说，大多数时候，事实性和程序性知识是可以通过概念性知识来理解的。或者说，反过来，事实性程序性知识在被总结之后的理解，也正好是对学科概念性知识的启发和要求。从这里，我们就感受到了不同层知识之间的上下贯通——从第零层到第二层再到第一层。在第二层知识之内，存在着大量的同层联系。例如，“只有一个角是直角的三角形是直角三角形”这个定义，就告诉我们“直角三角形”的概念建立在“直角”和“三角形”两个概念之上，并且进一步和“三角形的内角和是平角 180°”、“直角是平角 180° 的一半”有联系——所以不能有超过一个角是直角。这就是左右贯通。

然后，我们来到了第三层知识——学科大图景，包含一个学科的典型研究对象、典型研究问题、典型思维方式、典型分析方法和学科典型责任。例如，物理学的典型研究对象是自然界中无生命的物体，典型研究问题是

这些物体的状态和结构（原则上结构也是为了研究状态的需要而被进一步打开的）的描述和变化。物理学的典型分析方法有用具体仪器来测量状态，用数学建模和数学计算推理来开展研究的科学研究方法等。物理学的典型思维方式有分解和综合，科学精神（任何直接和间接和现实世界有关的问题都需要通过科学研究方法来开展研究），批判性思维等。物理学这个学科的责任就是探索现实世界中的物理的部分，达到能够描述其状态及其变化的程度，从而为其他学科和工程，也就是进一步的干预这个世界创造这个世界中的一部分提供基础。我们要看到，学科大图景这一层其实是对从经验和体验到学科概念知识，以及把学科概念知识用于解决问题这些个过程的总结提炼。因此，这里也是一个抽象提炼的过程，或者说从现实世界到概念世界和语言世界的提炼过程——学科概念的提出和应用是这里的经验和体验所依附的现实世界，学科大图景是这里的概念世界。当然，提炼完成之后，就可以用学科大图景来提出和解决这个学科的还没有被提出和解决的问题了。这仍然是上下贯通。

第四层一般性人类思维指的是，从第三层提炼出来的超越具体学科的典型思维方式。例如，批判性思维，当前主要从数学和物理学中发展而来，但是现在适用于任何一个科学学科。再例如，系联性思考，也就是事物之间往往有联系，联系表达出来之后往往有助于提出和解决问题，从个体看到整体，从整体来看个体。从数学或者物理学的知识体系，很容易体会到知识之间的系联性，以及系联性思考对于学习和创造知识的意义。但是，一旦提炼出来之后，我们发现，在超越数学和物理学知识的地方也可以使用系联性思考。甚至，系统科学就可以看作是系联性思考用于解决问题而发展起来的分析方法和解决问题的案例的集合。

现在我们来到第五层知识——教和习得方法。任何一个层次的知识，都可以看作是一个提出和解决问题的过程的结果，学习或者是创造知识的过程的结果，于是，实际上，掌握了学习和创造知识的方法，也就相当于间接地掌握了知识。因此，第五层教和习的方法指的是获得知识的两种方法——学习和创造知识——中的习得知识的方法，以及帮助其他人具有这样的方法，也就是教的方法。注意，这里更加强调从创造或者说假装着（前人已经创造过，现在我们来再一次地几乎独立地创造）创造知识得过程来教和习得知识，而不是单纯地接受知识得传递。因此，我们把学这个字替换成

了习——小鸟练习飞行，也就是实践得意思。

于是，我们看到，只要我们具有了三四五层的知识，我们实际上，就可以通过提出和结局问题从而来创造或者假装着创造知识的方式来得到相对低层的知识。因三四五层知识属于高层，并且具有创造相对低层知识的作用，我们称它们为高层知识生成器。显然，我们已经看到了，如果我们的教育是为了培养更多提出和解决问题的人，创造和创造性使用知识的人，而不是书袋子、知识的重复使用者，超越问题解决者，到问题提出者、战略性科学家的层面，甚至到战略性科学的教师也就是指引者的层面，那么，显然，我们的教和学必须以高层知识生成器为目标。

并且，更进一步，我们绝对不能把这些高层知识生成器当作事实性程序性知识来教给学生，让学生几条条记录一样地背诵，而是需要通过上下左右贯通的方式来帮助学生们构建起来对这些高层知识的理解。我们把这样的基于不同层次的知识之间，以及同层的知识之间，甚至说不清楚层次差异的知识之间的上下左右贯通从而形成理解的学习称作理解型学习。反过来，当前的教育把所有的知识都退化为事实性和程序性知识[35]，而事实性知识只有靠背诵来学习，程序性知识只有靠多练习来形成肌肉记忆。因此，当前的教育实践和这样的知识观是完全适配的。于是，这样的教育只能大面积地培养出来知识的重复使用者。如果我们要超越当前的教育实践，则我们必须走到以高层知识生成器为目标的理解型学习 [1, 30]。

小结一下，我们的教和学需要以高层知识生成器为目标，需要通过上下左右贯通形成理解的方式来教和学，才能帮助人类实现在三个世界里面行走，从而来培养创造和创造性使用知识的人，欣赏知识的创造和创造性使用的人，而不仅仅是书袋子和知识重复使用者以及被动解题者。

那么是不是具有了上下左右贯通的知识结构的人，掌握了和习惯了并且愿意使用学科大图景以及更高层知识来指导提出和解决问题的人，尤其是其中的用上下左右贯通的方式来学习和思考的人，在三个世界穿行的人，就会具有更好的创造力呢？比如说，更能够创造和创造性使用知识，提出和解决问题呢？这还需要进一步的实验和实践检验。这一节仅仅是回答一下，过去的以有的人类的知识是什么东西，过去大概人类创造知识和创造性使

[35]例如，学科概念知识也看作事实性知识，比如让学生背诵“只有一个角是直角的三角形是直角三角形”，而不是通过对经验和体验背后的现实世界的总结提炼而来。

用知识是怎么回事。完全有可能实际上，未来，创造知识和创造性使用知识完全没有必要走人类现有的道路。

2.15 本章小结

这一章我们从科学研究案例来看了一下科学研究中主要用到的思维方式和分析方法，包含科学精神，科学家精神，科学研究方法（通过实验和测量受到现实的启发，概念建模和数学建模，实验检验，知识的系统化），对比实验，科学对统一性的追求，科学的简单性原则，科学的可证伪性，还有科学知识的理论。原则上，看了本章以后，除了具体的物理学的学科概念知识你还不一定具有，你在什么是物理学的理解上，也就是对物理学的学科大图景（典型研究对象、典型研究问题、典型思维方式、典型分析方法、学科典型责任）的掌握上应该和一个真正懂得物理的物理学家没有什么差别了。学习物理学不仅仅是为了掌握物理学的具体知识，而是为了体会好什么是物理学，进而体会好什么是科学。然后，将来有一天，用体会到的什么是物理学和什么是科学来提出和解决自己感兴趣的问题。当然，你一旦这些知识不懂就可能体会不到物理学的学科大图景，而且对于真正开展物理学研究的人来说物理学的学科知识也是重要的。

顺便，这才是学科导论书和学科导论课，帮助读者和学生以最少的具体学科知识和具体学科研究案例来理解好建构好这个学科的学科大图景，而不仅仅是直接交代这个学科的学科大图景，更加不是直接交代这个学科的某些重要或者不重要的学科概念。

从整本书而言，尽管我们的主题是系统科学因而重点本来应该是通过系统科学的研究案例来体会系统思维方式和系统分析方法，但是，我们把正文导论之后的第一部分完全给了什么是科学，而且篇幅很长，就是为了帮助大家理解好什么是科学，然后将来掌握了系统思维方式和系统分析方法之后不会搞伪科学非科学。记住，我们始终坚持：宁愿没有系统（思维方式和分析方法），也不能没有科学（思维方式和分析方法，科学精神，科学家精神）。

如果你浏览了本章之后，发现，对于什么是科学认识不清楚，那么，请你不要再往前看：警告，在不知道什么是科学的情况下，看系统思维和系统

分析方法非常非常地危险。你有可能会成一个夸夸其谈的人，一个空谈的人，还是一个瞧不上很多具体研究工作的人，一个手高眼低的自以为高人一筹[36]实际上任何具体问题都不能解决的人。

此外，本章还梳理了什么是知识，什么是概念，人类创造知识的过程大概可以怎么看。这部分一方面是为了帮助你更好地理解什么是科学，另一方面，对于你学习其他任何一个讲道理的学科，都是很有意义的。很多人，学习了多个具体学科的很多具体学科概念知识，但是对于什么是知识，什么是概念，基本没有认知，这会阻碍其进一步学习、使用和创造这些具体学科的知识。希望你在学习了"科学知识的理论"之后，能够帮助到你未来的学习、使用和创造知识。顺便，掌握了"科学知识的理论"，你可能会对人工智能时代的教和学——教和学什么，如何教和学，为什么——也有了更深刻的认知。

[36]如果你实际上也高很多人一筹，能够提出和解决一些问题，甚至有你自己独特视角和方法的问题，那你自以为是完全不是问题。只要有底气，每个人都应该是自以为是的人，幸福和自满的人。你自己都不觉得自己了不起，自己做得挺好，谁还会高看你呢？如果你自己挺满意，又何必怕其他人知道你对自己很满意呢？找到自己，提升自己，对自己满意，并且随时准备走向更满意。

第三章　概念地图和网络用于描述系统

我们已经在第一章中介绍了什么是系统科学，什么是系统思维，又在第二章中介绍了什么是科学，什么是学科研究方法，什么是科学知识。在下面的章节中，我们来用具体的系统科学的研究和应用的案例来进一步说明什么是系统科学。在具体展开之前，我们再一次复习一下什么是系统科学。首先，我们复习一下系统思维，或者说系联性思考，

> 从孤立到有联系，从直接联系到间接联系，从个体到整体，从整体看到个体；
>
> 联系往往具有层次性，要上下左右贯通。

系统科学就是在科学精神的指导下，把系统思维（或者称为系联性思考）和科学研究方法用于提出和解决适合系统科学研究的问题[1]，以及这个过程中得到的关于这个问题及其解答的概念性知识，如何来回答这个问题的思维方式和分析方法，乃至如何来提出这个问题的角度和思维方式。在后面的章节中，我们也将介绍一些这样的提出和解决问题的案例，从而也是关于这些概念知识、分析方法和思维方式的案例。一方面，我们希望大家在学习完这部分之后可以做近迁移，也就是把系统科学的学科概念知识、思维方式、分析方法，用到非常相似的问题的提出和解决中去；另一方面，我们希

[1]所谓合适系统科学解决的问题就是适合用系联性思考和科学研究方法来解决的问题，一般来说就是需要对一个对象做分解，找到构成这个对象的元素以及元素之间的关系，然后用某种数学结构来描述这个对象的相互联系的元素，最终对这些元素和联系做分析综合起来才能回答的关于这个对象的整体或者元素的问题，或者说反过来，不考虑分解和综合就不能很好地回答的问题。

望大家可以做远迁移，也就是把系统科学的学科概念知识、思维方式、分析方法，尤其是后者，用到和这些案例不那么相似的问题的提出和解决中去。

我们从很多的日常经验中已经看到事物之间是相互联系的，来自于事物之间的关系的学科知识之间也是相互联系的。但是，对于科学研究来说，不能表示出来的联系是不能进一步被研究的。因此，系统科学的第一个分析方法，用来体现联系的方法，就是表示联系的方法。这个东西就是概念地图，或者概念地图的简化版，称为网络。这一章，我们用例子来体现概念地图和网络对于系统科学的意义，帮助大家学习一点点概念地图和网络本身，同时帮希望能够帮助大家建立用概念地图和网络来描述和解决问题。

3.1 什么是概念地图，什么是网络？

网络在图论上的定义是包含顶点以及把顶点连起来的边合起来构成的数学结构，记为 $G(V, E)$。其中，V 是顶点的集合，E 是边的集合。每一条边在最简单的情况下就是一对顶点，例如 $e = (1, 2) \in E$，有的时候也记为 $e = 1 \rightarrow 2$，表示有一条边从编号为 1 的顶点连到编号为 2 的顶点。更加复杂的情况边上可以有权重 W^i_j。例如，代表 i, j 两个点之间的物理距离，或者某个代表关系紧密程度的矢量 $\vec{r^i_j}$。原则上，也允许网络的每个顶点有自己的额外属性，例如 m_i 表示每个顶点的质量，f_i 表示每个顶点的不在网络内部表示的适应性吸引力。

这里的顶点和连边具体代表什么更多地取决于所描述的具体对象。但是图论上，或者说数学上，人们更加关注连接关系，也就是哪条边和那个顶点相连。实际上，每一个顶点的含义和所指代的对象可能都不一样，每条边也是如此。因此，基于简单的连接关系，或者说拓扑结构，来对一个网络做分析能做的事情是非常有限的。

那要是这样，网络的描述能力和网络分析，也就作用有限了。那为什么网络会成为描述系统的基本方法呢？如果有可能把一个系统中的元素和元素之间最基本最直接的联系都用连边表示出来，然后，同时这个系统中各个顶点的不同完全就来自于这个顶点在这个系统中的拓扑结构，也就是跟谁相连，那么，我们说，网络就是这个系统的一个忠实表示。当然，这个要求很高，大多数时候不一定能够满足。但是，如果我们回到物理系统，则这

个条件比较容易满足。

在一个物理系统中，基本的相互作用只有有限的几种，并且基本上这些相互作用都是相对距离的函数。于是，在基本相互作用的层面，我们完全有可能通过一个网络——其中各个参与作用的物体是顶点，物体之间的相互作用是连边，注意这里的连边上可以有权重——把每个时刻的这个系统的结构描述清楚。当然，在这里，以重力场和静电场相互作用为例，每一个参与作用的物体还有一些网络之外的属性，例如质量、电量。如果我们可以进一步把这些属性也表示为网络中的顶点和连边，那是不是一个物体的所有信息都被保存在这个网络里面了？实际上，物理学家就是有这样的梦想：任何物体，其特有的各种属性，都可以被分解为相同的或者几乎相同的种类非常少的基本粒子以及这些例子之间的相互作用。到今天，我们的基本粒子物理学的研究（标准模型，大统一模型文献） 已经使得物理学很接近这个梦想了，尽管还没有完全实现。文小刚等人提出的弦网凝聚模型（文小刚文献） 也可以看做是向着这样梦想的可能出路。甚至前面提到的空间距离或者矢量当做网络的权重也可能可以被简单的联系是否存在取代。毕竟空间本身也是物理学的研究对象。也就是说，完全有可能我们对这个世界的描述可以仅仅使用没有属性的顶点和没有权重的连边来构建。如果成功，则我们就有了对这个世界的彻底的网络描述。实际上，Wolfgram 的 “Theory of Everything” （Wolfram 文献） 就是这样的尝试，尽管离真实的物理还有非常非常大的距离。

不过，在这里，我们仅仅是把物理学对系统的描述可能可以从原则上就用彻彻底底网络当做网络描述能力和要求的一个例子。我们不需要真的实现了物理学的最终梦想才能用网络描述现实和开展网络分析。实际上，在拓扑结构的基础上加上某些属性量来构建一个网络也是可以的，给连边加上权重也是可以的。例如，如果我们仅仅考虑天体之间的万有引力相互作用，那么，把每个天体当做一个顶点，天体之间的连边用距离的大小和方向来表示，再给每个天体配上一个质量的属性，就可以完整地描述一个系统。于是，我们就可以把天体的运动看做是这样的一个网络在整个空间中的运动，甚至进一步分解成网络的整体运动和网络内部的相对运动来进一步认识这个系统。

也就是说，原则上，完全用彻底的网络来描述一个系统是可能的，但

是，也可以用不彻底的网络，也就是网络加上一些顶点的属性和边的权重，来描述一个系统，但是用尽可能彻底的网络来描述世界是我们的追求，我们的梦想。

也许来自于物理学的例子，不太容易理解。现在，我们来举一个班级里面的人际关系的例子。我们说，每一个人其实是有名字、体重、外貌、学习成绩、性格、家庭背景等等特征的。既然我们要研究这个班级的人际关系，那么，一方面显然人际关系可能和前面列出来因素都有关系，但是，另一方面，我们没准可以通过记录这些学生两两之间互动的次数和时间长度或者互动的类型甚至内容来开展这个研究。最简单地，我们忽略互动的内容和时间长度，只考虑互动的次数 t^i_j，或者考虑互动的累计时间长度 τ^i_j。我们就得到了一个网络：顶点是每一个学生，边是每一对学生之间的互动次数或者互动总时长。我们甚至可以进一步忽略细节，仅仅保留是否存在互动，也就是选取一个阈值，如果互动次数护着互动时长大于这个阈值，就认为有连边，否则没有连边，得到 C^i_j。很有可能这个极度简化之后的网络仍然保留了很多的可以回答所感兴趣的研究问题的信息。例如，如果我们的第一个感兴趣的问题是找出来这个班里最最受欢迎的人，很有可能，我们只需要在 C^i_j 的基础上算一算 $D^i = \sum_j C^i_j$ 就可以。注意，这里我们把互动当做了双向行为，每一次互动都看做是双方的。甚至，我们可以进一步找出来这个班级里面的小团体，例如哪几个学生经常在一起玩，另外的哪几个学生又经常在一起玩，而这两群学生之间互动比较少。在网络分析中，这被称为社团结构发现。很有可能，为了发现这样的社团结构，知道所有的 C^i_j 也往往就够了。实际上，在网络分析发展的过程中，我们就有这样的例子——一个空手道俱乐部的小团体及其发展的研究 [31]。

Wayne Zachary（韦恩 · 扎卡里）通过收集这个空手道俱乐部成员之间的社会交往数据，对这些数据做分析，研究了一个空手道俱乐部的分裂现象。具体来说，这些数据包含的是每一个俱乐部成员，以及这些俱乐部成员是否有在俱乐部之外的友好型的社交关系。整体这个俱乐部有 60 人，通过调查研究发现，其中 34 人之间具有满足要求的社交关系。因此，其他 26 人就被作者忽略，不放到这个数据里面来作进一步研究。调查发现，这个 34 人组成的网络中有 78 条边，如图 3.1 所示。

刚好这个俱乐部在被研究期间发生了分类现象。两位领导者，教练 Mr.

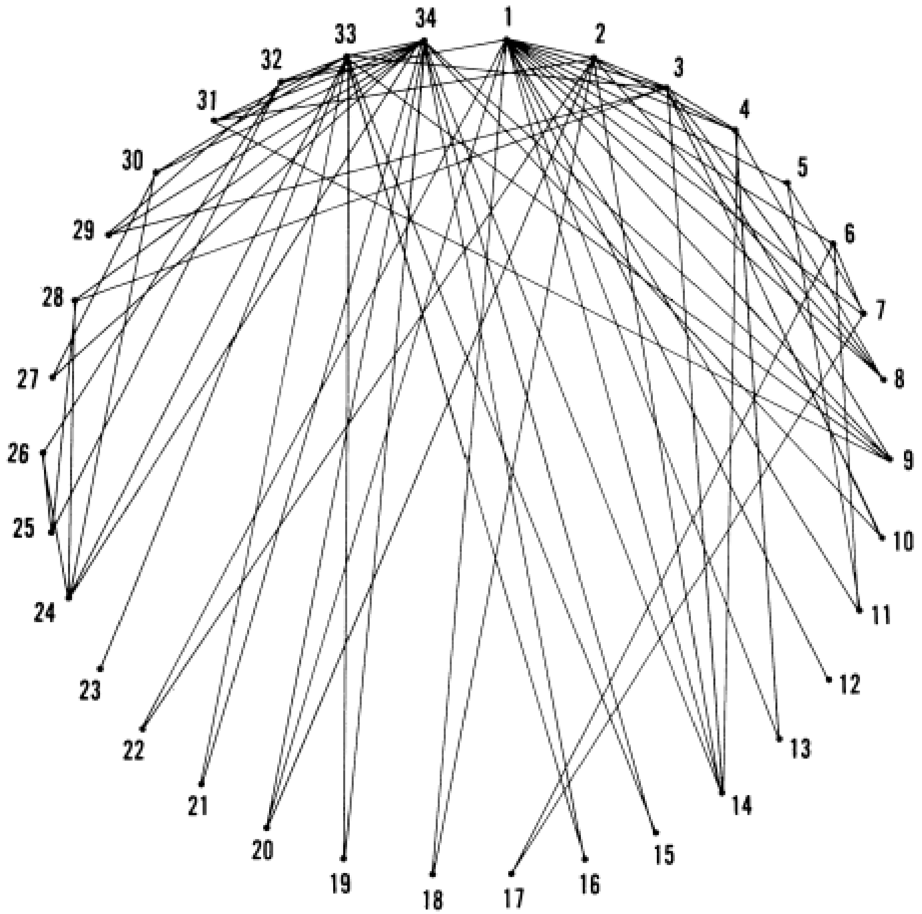

图 3.1: **空手道俱乐部成员关系网络**。存在俱乐部活动之外的社交关系的 36 位空手道俱乐部成员构成的网络。网络图来自于用 [31] 的数据，用网络分析软件 networkX 重新制作。在这张图里面，我们同时显示了已知的俱乐部分裂的结果（圆形节点跟着教练，三角形节点跟着管理员）和网络分析的结果（红色代表教练集团，蓝色代表管理员集团），也就是俱乐部成员的分类结果。这张图用 networkX 重新做。

Hi 和管理人员 Officer 发生了冲突，俱乐部成员也在这两者之间选边站。这个每一位成员到底站到了哪一边的数据也被研究者收集到了。于是，这里的研究问题就成了，是否研究者可以在收集的数据上来对俱乐部的成员做一个分类，得到刚好和实际上选边站的结果一致，或者一致性非常高；如果可以做到，这个用来分类的分析方法是什么？最后，Zachary发现，采用一种基于信息流的算法，可以达到分类结果，除了在一名俱乐部成员身上给出的结果不正确，和收集到的选边站的数据相符。

不过，图 3.1 呈现的分类结果并没有采用Zachary在 [31] 中的分析方法，而是采用更加现代的一种网络聚类分析算法——选一个效果好点的算法 。我们发现，网络分析的结果（红色代表教练集团，蓝色代表管理员集团），也就是通过网络聚类算法得到的俱乐部成员的分类结果，和确实已知的俱乐部分裂的结果（圆形节点跟着教练，三角形节点跟着管理员）高度一致。

如果你还愿意了解更多一点这个分类算法：如果一个网络本来就分成不相连的两片那很显然，这个网络就自然地分成了两个集团的了；但是，在实际网络中，往往没有这样天然的区分，因此，所谓的给网络分集团就是要做到集团的内部联系顶点之间的比较紧密，集团之间顶点之间的联系比较稀疏。不同的聚类算法会用不同的方式来构建这样的集团，但是其目标都是一致的：集团内部联系紧密，集团之间联系稀疏。为了这个目的研究者发明了大量的分类算法以及衡量分类效果的指标 [32]。

这个例子说明，很有可能通过把社会交往简化整合成一个网络，对这个网络来做分析，可以得到一些这个网络背后的更深层次的信息，并且对于这个网络未来发生的事情具有一定的解释甚至预测能力。于是，我们是不是可以把类似于网络顶点的分类的算法用在更多其他的对象的网络上去呢？是不是还可以有一些用来刻画网络的其他的深层次信息的算法呢？这就是网络科学的研究对象和问题。

等等，我们前面提到，人际关系和名字、体重、外貌、学习成绩、性格、家庭背景等等属性很有关系，然后我们就直接完全抛弃了这些属性，而是从观测到的互动数据直接开始构建网络做计算分析来回答问题了。怎么能这样做呢？

一方面，直接观测到的互动数据里面实际上可能已经包含了上面那些属性里面的多个属性对于人际关系的影响。也就是说，顶点属性数据，可能

不是这个网络的额外数据了，不提供额外信息了，于是，我们也就不需要考虑它们了。当然，这一点得检验，也就是看看加进去与否多大程度上影响分析结果，逻辑上是否说得过去，或者做一些相关性分析，看看目前的观测数据中是否很大程度上已经和这些属性数据高度相关了。另一方面，很有可能这些属性数据中，还是有一些没有被直接体现在这个网络的观测数据之中的，那我们就要把这些属性当做额外信息加到网络里面去进去。当然，我们的最终梦想，还是网络本身就包含了这个系统的所有信息，不再需要引入任何顶点属性，甚至边权重。但是，如果需要加上才能描述现象，才能解决问题，我们也接受。

这就回答了前面提出的，每个顶点都有自己的额外属性，凭什么仅仅包含顶点和连边的网络具有描述一般系统的能力：第一，我们尽可能建立不需要额外属性信息的网络来描述系统，第二，实在有需要也可以加上一些额外的属性。

不过，这个不得已的态度也会造成一些问题：一方面，我们希望每一个顶点的编号仅仅是一个编号而已，交换编号不应该改变网络的任何性质；另一方面，我们也允许每个顶点带上额外属性，于是就不再能交换编号，不再有前面的交换编号不改变性质的对称性。

现在，我们已经大概了解了什么是网络，也初步接触到了网络分析以及用网络分析来解决问题。后者我们下面会继续展开。目前，我们主要关注什么是网络，以及为什么在构建网络的时候，我们尽可能地让这个系统的所有信息包含在网络本身的连接之中，而不是依靠额外顶点属性或者边权重信息。一旦我们做到了这样的网络来描述所感兴趣的系统，我们就称我们为这个系统找到了骨架，或者骨架性描述。当然，在不能完全做到的时候，只要尽可能地做到，我们也马马虎虎认为找到了这个系统的骨架。

在实际研究中，就算当我们建构不起来一个系统的这个彻底的网络描述，我们也会经常忽略顶点属性和边权重，仅仅保留顶点之间是否存在联系的信息来得到一个简化网络。我们往往把这个简化网络粗糙地称为网络。注意，从数学上，这个简化网络和我们追求的彻底的网络描述的网络是一模一样的。在实际工作和日常语言中，大多数时候，网络指的是这个简化网络。

现在，我们来看看概念地图是什么，为什么它也是系统的基本描述方

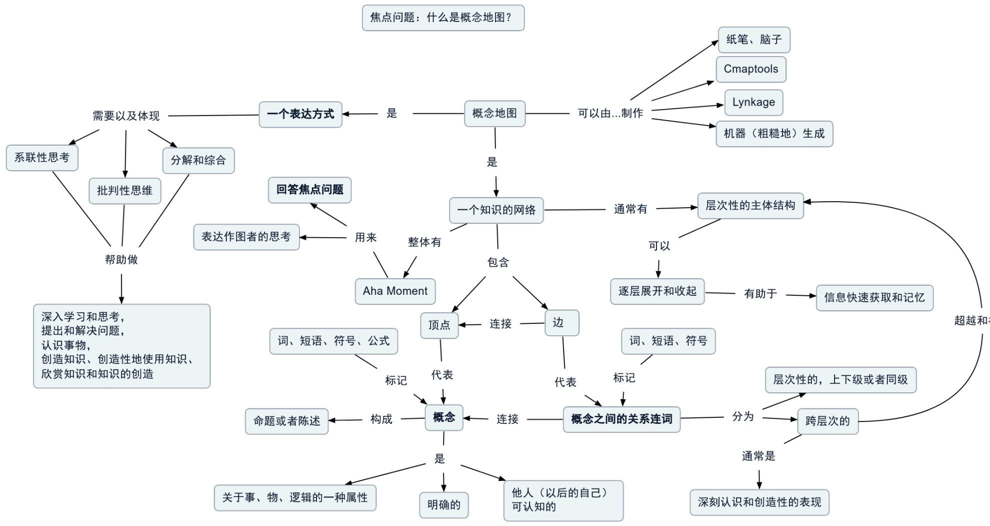

图 3.2: **什么是概念地图**。用概念地图来展示什么是概念地图，注意以下概念：概念，连词，联系，焦点问题，层次性联系，跨越层次的长程联系，以及更重要的系联性思考、批判性思维和分解与综合。请读者先自己读一读这张图，稍后我们会来进一步解释。

式，系统的基本数学结构。**概念地图包含了概念和连词，以及概念和连词之间的连边**。一般来说，连边是有方向的，并且一条连边的两端一头连着一个概念，另一个头连着一个连词。一个“概念-连词-概念”的三元体，如果把连边也算作一个元素，则是五元体“概念-连边-连词-连边-概念”，表达一个相对完整的意思。例如，“网络（概念）——包含（连词）——顶点（概念）”，“连词（概念）——连接（连词）——概念（概念）”。严格来说，这个图是构建在人的认知结构中的，但是，我们确实经常把它画出来在纸上、电脑屏幕上。例如，下图就是一张关于概念地图是什么的概念地图。顺便，为什么叫做概念地图而不是概念图，将来等到把这个图用于描述学科知识的时候，就会发现，其展示出来的知识结构确实足以看出来哪些概念和概念群体是知识基础，哪些是知识高峰，哪些是热点。这些往往是和地图联系在一起的。

其实，我们的思考本来就是采用概念地图的形式来开展的。例如，我们学习“直角三角形”这个概念的时候，肯定是理解到了“直角三角形是有且只有一个角是直角的三角形”，而这句话就建立了“直角三角形”到“直角”

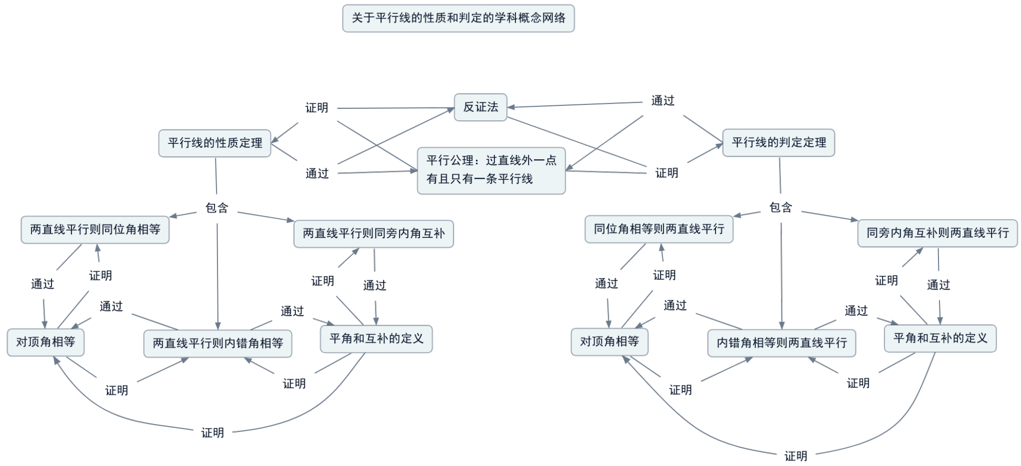

图 3.3: **平行线的判定和性质定理之间的关系**。通过把平行线的性质定理和判定定理之间的逻辑关系，以及所需要的其他概念和命题化成概念地图，可以更好地看到这些定理之间的依赖关系，促进理解这些定理。

和“三角形”的联系，甚至也悄悄地建立了“直角三角形”和“三角形内角和 180°”之间的联系，以及更加悄悄地用到了“加法”和“比大小”（之所以直接三角形只有一个直角是因为三角形内角和等于 180° 的要求。而在得到这个结论的过程中，我们还用了加法和比大小）。你看，为了理解好“直角三角形”的概念，我们实际上用到了多个其他概念，以及这些概念和直角三角形之间的联系，这些概念之间的联系。

实际上，数学知识和物理等科学学科的知识，基本上就是这样来组织的。例如，在平面几何中，我们从很少的几个基本定义和基本公理出发，构建了包含了很多新概念和一大群定理的知识体系。例如，通过“对顶角相等”这个定理，可以证明平行线的三条性质定理相互等价，证明平行线的三条判定定理相互等价，然后从平行线的性质定理可以通过平行公理来证明平行线的判定定理，反之也然。这样就体现了这几条定理公理之间的关系。

下面，我们把出现在概念地图中的学科概念、命题、公理等等都称为概念。只要含义对作图者自己是明确的，能够从这个代表概念的用词找到具体的外延对象的，都算概念。用数学的语言来说，就是可以对应到一个集合的都算概念。我们还可以把所有的小学数学的知识、平面几何知识，甚至所有的所学的知识，都画成这样的概念地图；把所有的汉字（顶点）以及汉字

之间的音形义的联系（连边），按照联系的类型——象形、指事、会意、形声——来标注连词，也画成概念地图；把所有的英文单词也按照结构和含义，或者说构词法来画成概念地图；把所有的物理（化学、生物、医学等等）知识也画成概念地图。我们把用于呈现学科知识的概念地图，称为学科概念地图，或者学科概念网络。实际上，我们已经梳理了大量的这样的学科概念网络。

顺便，由于学科大图景也必须通过学科概念和学科研究案例体现出来，因此，前面的学科大图景，也可以被包含到这里的学科概念网络中去。当包含了学科大图景的时候，我们稍微改变一下名词，称为学科知识网络。这个区分并不严格，有的时候会被混用。但是，大概来说，我们把学科概念网络用来指代这个学科的概念性知识，例如三角形、勾股定理，通过连词所构成的网络，然后用“学科知识网络”来指代既包含学科概念知识又包含学科大图景这样的高层知识的概念网络，如图 3.4。在图 3.4 中，除了平面几何学的关于平行线的学科概念知识，我们还可以看到逻辑演绎证明（三段论和反证法），逻辑思维，依靠逻辑思维来开展批判性思维，甚至理解型学习这些第三、四、五层的知识。具体每一个知识的层次的名称和含义见 [1]。

除了用在学科上，概念地图实际上就是一个表达意思的工具或者说方式，可以用在任何需要结构化地表达意思的场合。概念地图的三元体“概念-连词-概念”实际上就构成了一句话。因此，概念地图是可以被重新表述为一句一句的话的，只需要把所有的三元体都转成相应的句子就行了。那概念地图和一段有顺序的句子的区别在哪里呢？

首先，概念地图由于没有整体顺序，反而更难直接阅读了。当然，将来我们会发现，概念地图往往有根概念，有层次性，所以，也有整体顺序。不过，至少表面上，尤其对于初次接触概念地图的人肯定更难阅读了[2]。那为什么我们要用概念地图呢？这就牵涉到概念地图的好处。

其次，概念地图允许非线性阅读，有重点地阅读，而一段有顺序的文字通常只能做线性阅读，也就是一个个字按照出现的顺序读过去。有过对比较深入的文本的阅读的经验就会发现，实际上，在阅读文本的时候，一定是

[2]不过，这个对概念地图的批评的角度其实不成立，任何一个好工具真正提升人的工作思考的效率和深度的工具，对于初次使用者来说，都是有一个学习曲线的，都会有一段时间觉得很难使用的。甚至连中国人普遍觉得好用的筷子都是如此。

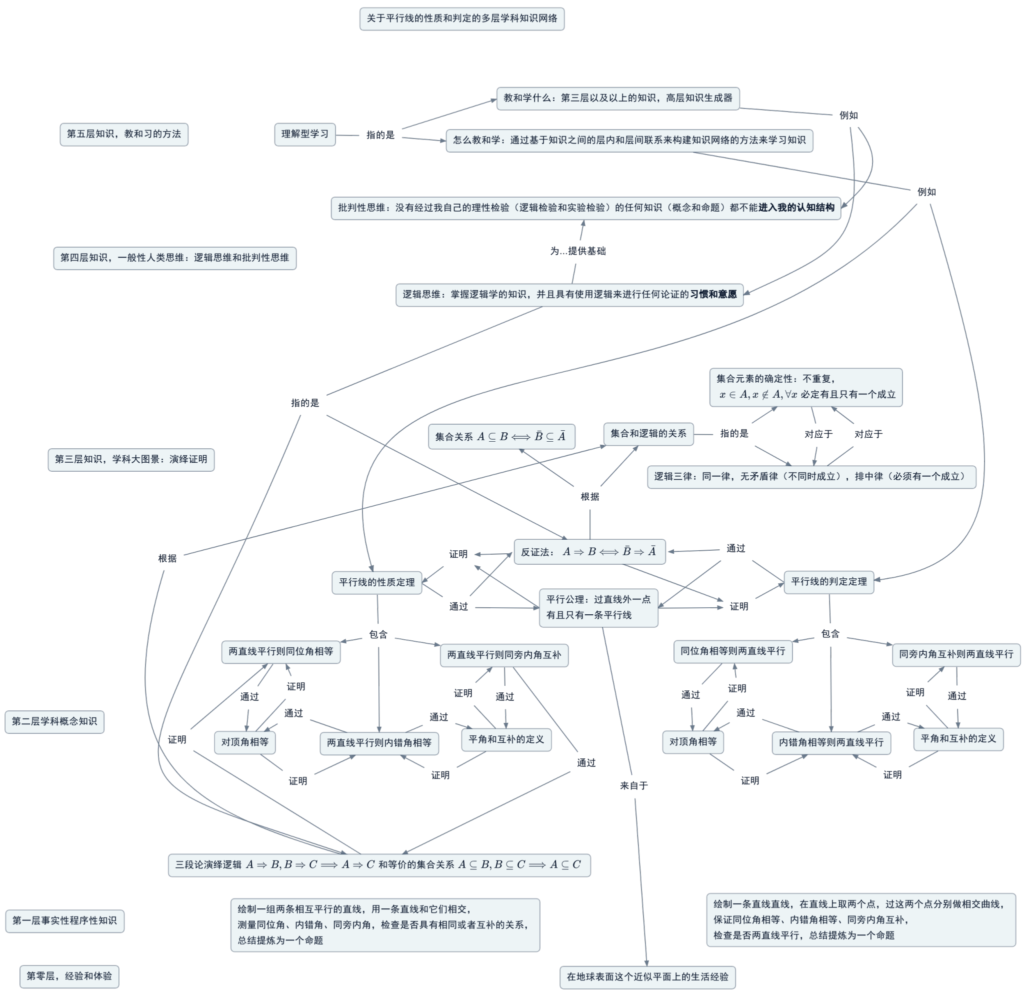

图 3.4: **关于平行线的判定和性质的学科知识网络**。这里我们把平行线的判定和性质的定理之间的关系的证明的过程进一步展开，看到了背后其实是数学学科的典型思维方式之一逻辑演绎证明，以及更高层的关于获取知识的一般性人类思维——批判性思维和教和习的方法——理解型学习。具体每一个知识的层次的名称和含义见 [1]。

伴随着我们的思考的，并且这个思考往往是比较长程的。也就是说，读到后面的某一个词或者某一句话，我们往往会联系到之前的一个词或者一句话，甚至之前的整个篇章。只有通过这样的前后联系，我们才能更好地理解这些文本。实际上，我们还经常会读完之后对文字做一个结构化梳理。例如用列表甚至嵌套的列表来把文本中的重要信息列出来。那么，在这个意义上，概念地图直接允许你建立长程联系，直接做并且超越列表式总结梳理。也就是说，对于文本的线性阅读，实际上，我们也是有一个挑选重点对象重点片段，建立重点对象之间的联系的过程的。而在概念地图这里，这个过程实际上直接被图形化启发了，而不需要我们在阅读线性文本的时候那样来默默处理。因此，对于概念地图的熟练使用者，实际上，选出来重点，建立起来联系的过程实际上要比阅读线性文本快速准确和深入很多。

例如在图 3.3 中，我们很容易看到“两直线平行则同位角相等”和“两直线平行则内错角相等”之间是具有双向的证明关系的，也就是两者等价，同时“两直线平行则内错角相等”和“两直线平行则同旁内角互补”之间也具有双向的证明关系的，于是我们可以很准确和迅速地抓住，其实“两直线平行则同位角相等”和“两直线平行则同旁内角互补”之间也具有双向的证明关系。同时我们发现，平行线的判定定理之间也具有类似的关系。注意，如果我们不是为了易读性，我们实际上应该把左右两侧都出现的“对顶角相等”（还有“平角和互补的定义”）等同起来画成一个概念。这个时候，你就会发现，对于理解平行线的几条性质之间的关系，以及平行线的几条判定定理之间的关系来说，“对顶角相等”和“平角和互补的定义”非常地重要。更进一步，实际上“对顶角相等”也是基于“平角和互补的定义”来得到的。于是，“平角和互补的定义”是这部分知识的共同基础。这一点，固然你读一本好的几何学教材也能够读出来，但是，在图 3.3 中，实际上，你只要数一数哪个顶点的连边最多，基本上就能识别出来“平角和互补的定义”值得多花点注意力。

最后，概念地图更容易看到整体。在图 3.3 中，我们很容易发现，平行线的性质定理基本上单独成一块，平行线的判定定理也基本上单独成一块，尽管两者共享一些基础知识。也就是说，这两块分别学问题不大，先搞清楚其内部的几条定理之间的关系。然后，更上一层，我们发现，其实平行线的性质定理和平行线的判定定理之间有紧密的联系——可以相互证明，基于

平行公理和反证法。再结合前面的两块内部的几条定理等价，就可以发现，如果我们要真的来证明平行线的性质定理和平行线的判定定理之间的等价关系，则我们只需要选择各自的其中的一条就够了。这样的看到知识的板块现象，进入到知识板块的内部，在跳出来看到板块之间的联系从而构成的更大的板块，是概念地图一个更大的优势。

实际上，正是这个体现了对象之间的联系、方便了分解和综合从而方便从个体看到整体从整体的角度来看个体，概念地图才会在本书中当作系统科学的典型的描述和分析系统的工具之一。希望通过这一节，你已经意识到，当遇到一个问题的时候，我们要去关注这个问题对应的系统，对于这个系统我们往往可以去思考这个系统由哪些元素构成，这些元素之间有什么关系，这些元素和关系是不是可以化成网络或者概念地图，这些分解出来的元素和关系对于回答我们一开始的关于这个系统的问题是不是有帮助是不是足够。如果这个意识有了，那其实你的系统思维的修养其实就足够高了。

这里先介绍了网络，包含彻底的网络——顶点不可区分不存在属性，连边（最好是不加权重的连边）代表了一切信息；比较实际的网络——可以允许顶点的额外属性和连边的权重等信息，但是要尽量地靠近彻底的网络，并且额外属性和网络结构尽量做到没有相互重叠；以及粗糙的网络——通过把实际的网络做近似，扔掉全部或者一部分顶点的属性或者边的权重等，得到的可以用来解决一部分问题的网络。然后，我们介绍了概念地图。我们还说，两者都是系统的典型描述方式。我们还看到了，概念地图和网络紧密相连。那两者的关系到底是什么呢?

3.2 概念地图和网络的关系

概念地图通过增加了连词使得每一条连边都有了自己的属性，而且往往是非限定类型——也就是连词本身是什么有多少都没有什么限制——的属性。于是，我们发现，概念地图就是一个顶点是概念，连边是带着连词的概念之间的连线的网络。不过，用连词相连的概念往往构成命题，尤其在数学知识中，因此，实际上，概念地图还是一个命题和命题通过同一个概念或者通过命题之间的关系，例如证明关系，相连构成的命题网络。当然，实际

应用中，有些概念之间也不构成命题关系。因此，实际的概念地图是这两者的混合。

如果我们把概念地图简单化，忽略所有的连词，也就是把所有的连边都看作没有自己的属性，然后把概念名称仅仅当作相应顶点上的标签不参与任何进一步分析（注意，实际上，在概念地图中并不是如此，往往这个概念的名称背后对应着特定的含义，并且这个含义还不一定已经体现在这个概念地图之中），那就得到了一个最简单的网络——单类顶点无边权网络。于是，我们就可以运用网络分析方法来对这个单类顶点无边权网络做分析，例如计算每个顶点的度来看每个顶点的重要性，计算整个网络的最短距离来看这个网络的顶点之间是否紧密相连，找出来这个网络的集团结构来看这个网络是否可以分成几个内部紧密相连但是之间联系更少的局部区块。这些分析都可以用于解决一些概念地图所描述的背后的系统的问题。例如，在教和学的场合，有了一个学科的概念地图，再得到了顶点重要性可以帮助解决应该教和学什么；对比两本书的不同讲法的概念地图，如果一个最短距离小另一个大很可能意味着那个大的没有呈现好一些关键联系；如果概念地图可以分成几个局部区块，则很可能在教和学的时候可以先解决区块内部内容的教和学。在其他场合也是如此。因此，把概念地图简化为单类顶点无边权网络是有意义的。

概念地图也可以看作是双类顶点无边权网络（网络科学中称为二部分网络）：概念和连词分别算一类，连线把而且只把这两类顶点相连。这样我们就可以把连词也纳入到分析对象的集合之中。比如说，这样我们就很容易识别出来某个关系连词在这个概念地图中出现的次数很高。当然，双类顶点无边权网络的分析可能比单类顶点无边权网络要复杂一些。甚至，是不是直接忽略顶点的类别把双类顶点无边权网络当作单类顶点无边权网络分析算了，以及如果不是这样处理，还有其他对双类顶点无边权网络的分析方法吗？这个问题我们暂时不回答。

更一般的网络还可以是多类顶点之间由多种类并且带有权重的关系相连构成的。每一类顶点我们通常称为一层。层内有连边，层间也往往由连边，并且由于顶点种类不同，层间联系和层内联系往往也属于不同的种类，不同层内部的联系也往往属于不同的种类。一般地，我们把这样的网络称为多层网络。如果两个顶点之间还可以存在多种类的关系，那就是更一般

的多层多关系网络。

类似地，概念地图既然也是网络，那自然可以相应地推广为多层多关系概念地图，或者多层多关系概念网络。在概念地图中，由于有了连词，概念之间本来就自然地允许多关系，因此，我们不再突出多关系这一点。在名称上，由于我们希望把概念地图主要用于指代单层的概念网络，我们以后把多层的概念地图一般称为多层概念网络。图 3.4 实际上就是这样的多层概念网络。除了一般概念地图中所包含的学科概念层，我们还看到了第零层经验和体验，第一层事实性程序性知识，第三层学科大图景，第四层一般性人类思维，第五层教和学的方法。

最后，尽管我们这里用的概念地图的例子主要是关于学科知识的，来解决学科知识的教和学的问题的，但是实际上，它可以用于描述任何一个系统，促进解决这个系统的任何一个需要分解和综合来解决的问题。

3.3 概念地图用于描述系统和解决问题的案例

我们来举几个用概念地图来解决实际问题的例子。

3.3.1 自行车的结构和学会骑自行车、改造自行车

假设我们现在要帮助一个初学自行车的人来学会自行车。我们看看除了交给她一辆自行车让他去观察他人和自己摸索尝试摔倒总结之外，还可以怎么干。

实际上，通过看他人骑行自行车就会发现，车把手是用来控制车行方向的，脚蹬子是用来把人的动力传递给自行车的 (链条、大盘、小盘、变速器部分合起来是把脚蹬子上的动力传递到车轮的)。于是，在不考虑上下车的漂亮方式的条件下，大概也就知道了怎么骑车了。但是，实际上，学习骑行自行车的关键在于保持车的稳定性：往往初学者主要依靠车把来控制车的方向和保持稳定性，并且由于注意力太多放在了车把上，反而忽略了踩踏脚蹬子的动作和身体的方向对车的方向和稳定性的影响而使得车很难保持稳定型。学会了骑行自行车的人往往就会认识到，依靠蹬脚蹬子的脚的用力以及身体的方向来控制行车方向和稳定性要比依靠车把手来控制有效

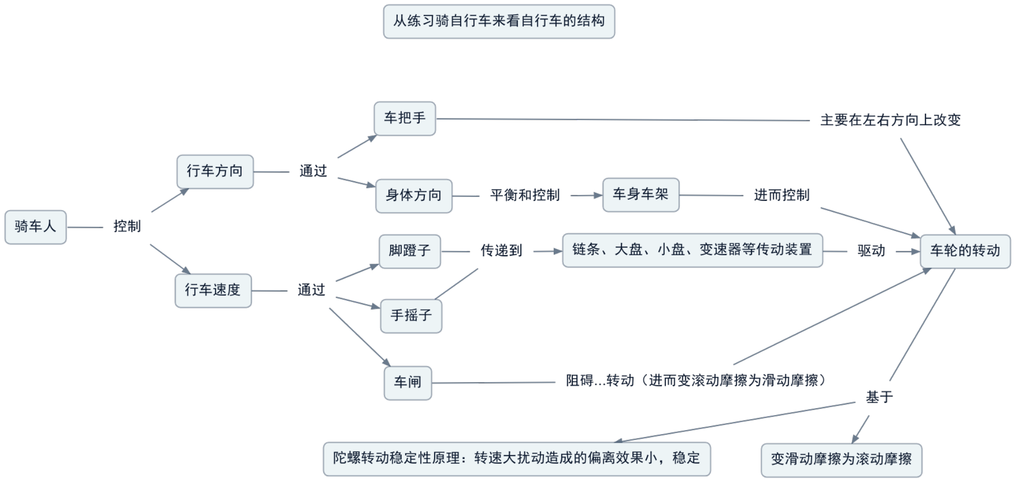

图 3.5: **从学习骑自行车的角度来看自行车的结构**。对于一个学习自行车的人来说，最重要的是了解其可以通过什么部位或者方式来控制自行车。因此，我们关注控制车行方向的车把手、传递动力的脚蹬子、必要时临时减速的车闸，以及控制车的方向和稳定性的隐藏方式——人身体的方向。更进一步，理解自行车为什么会不倒的物理原理也会对骑行自行车有帮助。

的多。甚至一旦掌握好了，就会发现，其实松开手把一段时间也没问题，仍然可以实现通过脚和身体的方向来控制行车的方向。

自行车要稳定前行还有一个要求：轮子要转起来。其物理原理是，转动起来的东西，当受到额外的力的干扰的时候，这个额外的力可以变成转抽方向的进动和章动，而不会直接造成车摔倒。转动速度越快，这个干扰的力造成的效果就会越小。这部分如果真的要理解，还需要去列出来转动物体的运动方程，然后，看看这个运动方程是不是有稳定的不动点，也就是某些外力使得系统的状态偏离不动点之后会具有回到这个不动点的趋势。当前阶段，我们先把这个结论当作物理学已经给出的知识。未来我们再进入到这个结论本身是怎么来的，如何用科学知识和科学思维来解释。那么，有了这个知识有什么用呢，对于学习骑行自行车的人来说？刚开始学习自行车的人可以稍微地加快一点点行车速度来使得行车更稳定，未来掌握了更高级的控制行车方向和稳定性的方式以后再考虑降低速度。也就是说，刚启动自行车的时候不稳，看起来要倒，没关系，想办法增加一下自行车的速度，没准就会更稳定。

通过脚的用力和身体的方向来控制车的方向和稳定性其实背后是有物理原理的支持的。如果你能够明白这个物理原理是什么，怎么发挥作用的，那就可以更好地运用这个原理来控制车的方向和稳定性。但是，就算不知道这个原理，你经过尝试，例如身体往一侧歪或者调整身体在自行车车座上的分布看看车行车把手和前轮往什么方向转，积累一些经验也就能够掌握了。这个比前面那个转动的更快更稳定掌握起来应该要容易很多。

注意这个自行车的结构和功能的概念地图根本就不是自行车的实际结构图。对于初学骑行自行车来说，请问是这个自行车的结构和功能的概念地图更有帮助还是实际结构图更有帮助呢？显然是前者。在这里，我们忽略了大量的细节结构，同时重点关注了和骑手控制自行车的有关的结构。我们还强调了对于控制自行车来说的最关键的部位或者方式——骑手的身体方向。对于控制的任务来说，对一个系统的概念性的掌握，尤其是对于其中的控制界面有关的子结构及其控制原理的掌握，才是关键。

如果我们还想改造一下自行车，我们就发现，大概只需要保留一个接受和传递动力的部件、一个控制行车方向的部件（但是可以用车手的身体代替）、一个滚动部件（为了把滑动摩擦转变为滚动摩擦以及为了更容易保持稳定性）就行了。于是，你看，有的自行车把脚蹬子改成了手摇的——在这里被我称做手摇子；有的自行车是独轮的，并且没有车把手。搞清楚一个系统维持其功能所需的最基础的要求，然后再搞清楚剩下额外添加的部件再发挥什么作用对于理解和设计这个系统是很有帮助的。在这些方面，从功能的角度绘制这个系统的概念地图能起到很大的作用。

当然，如果我们对自行车还有更进一步的要求，例如，完成初步诊断的任务，也就是骑行遇到了某个问题去猜出来可能哪个部分出问题，那就需要包含更多细节的概念地图了，如图 3.6。例如，我们就可以把自行车分成车架、转向系统、刹车系统、传动系统、车轮这几个部分。然后，车架进一步分成车座、车梁、前叉、后叉等部分，车轮分成前后轮，前后轮进一步分成轮框、花鼓、辐条、车胎等部分，车胎有的可以进一步分成内胎、外胎等部分，等等等等。有了这样的一个自行车部件的层级体系，我们就可以来做出来初步的诊断。第一种方式就是建立一个常见问题和出问题部件的列表。这个就是修车师傅积累的经验了。第二种方式就是不断地运用分解和综合。也就是，一个车坏了，如果完全没有经验，那么，就可以通过在某个

层级做部件替换来发现出问题的部件。例如，我们可以在第一个层级，逐个替换车架、转向系统、刹车系统、传动系统、车轮之一，直到发现只要把这个层级的所有部件的某一个新的替换上去自行车就好了，不替换就不行，那么，我们就说出问题的就是这个部件。然后，我们再把这个部件的下一层级的部件打开，再次做逐个替换。我们可以不断地这样做直到找到最小层级的部件，或者认为再一次再下一个层级做子部件替换所花费的时间成本和直接替换这个层级的部件的成本像差不大从而结束这个分级的过程。接着，重新把已经做了必要的替换的各个部件重新层级性地组合起来。注意，在这里，我们忽略了某个层级下两个部件同时出问题的情形。当然，如果我们发现，所有的单个替换不能解决这个问题，那还是要考虑两个部件同时出问题的情形的，甚至未来更多个部件同时出问题的倾向。其次，再替换的时候，尽量避免一口气换到底，直接拆分到最底层的部件然后一个个替换。这样做可能性太多了，而且，多个更加小的层级的结构同时出问题的可能性会增加。实际中往往是经验列表搜寻和分解和综合两种方式的结合。在医学诊断上也是类似的。

注意，综合起来的过程，实际上更加依赖于你对各个部分的关系的掌握。也就是说，如果你没有注意到各个部分的关系，哪个部分必须和力一个部分用什么样的方式组合到一起，你可能找到了问题，做对了替换，也不能重新组装起来一辆没问题的自行车。于是，你看到在图 3.6 中，我们需要特别注意到哪些不同部件之间的连接关系，尤其是突破层级的联系，例如转向系统部分的子部件“龙头”以“某种特定的方式”连接到从车架部分的子部件“前叉”，进而连接到车轮部分的子部件“前轮”。正是这个连接使得转向功能得以实现。

顺便，我也希望通过这个例子你看到概念地图和思维导图之间的真正的不同。思维导图从形式上和概念地图只有一个地方不同：思维导图一般来说没有连词。其实，有的思维导图受到了概念地图的启发之后，也允许使用连词。但是，从内容和思维上，最大的不同就在于：思维导图的连线通常包含“包含”关系、“导致”关系，并且一般来说尽可能地做到没有突破层次的联系，也一般来说不回答一个系统层面的整体问题，也就是没有概念地图的焦点问题。那反过来，概念地图一般来说不限定联系的类型，强调用准确的连词标明联系，一般来说确实具有层级结构但是更加鼓励把突破层

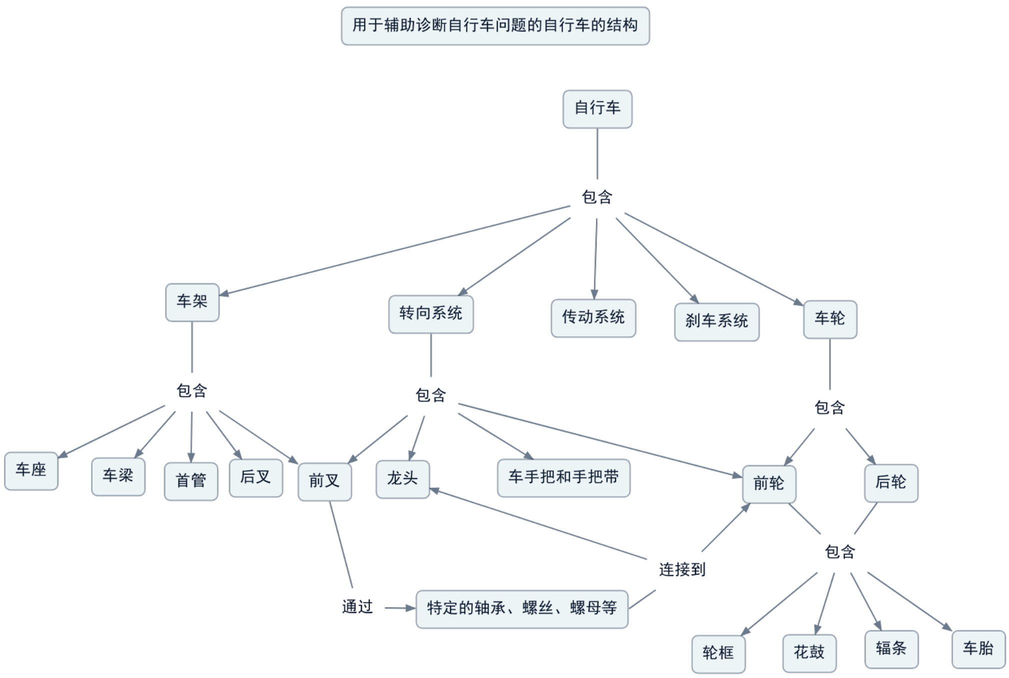

图 3.6: **从诊断的角度来看自行车的结构**。对于一个要诊断和修理自行车的人来说，依靠嵌套的分解来认识自行车的结构，接着利用部件之间的联结机制来综合起来得到自行车的整体，以及在诊断过程中嵌套地使用分解和综合都是很有意义的。这张图没有画完整，仅仅做个示意。

级的联系找出来，整体上要回答一个焦点问题——也就是说，哪些和哪个层级的子结构出现在这个系统的概念地图之中完全是按照焦点问题来确定的，如果出现以后可以更好地回答焦点问题则包含，否则就不包含。

3.3.2 概念地图用于辅助做题实现回溯性诊断

在当前的中小学甚至大学的教和学中，对概念理解的教学以及概念教学所依赖的批判性思维、系联性思考，以及更进一步批判性思维所依赖的逻辑思维的关注是远远不够的，往往在对这些关注不够的条件下又要达到成绩上的要求就采用了记住事实性知识和流程性知识的办法，通过背诵和大量做题来形成记忆的方式来开展所谓的教和学。这对于学习者的创造力是非常有害的。关于如何开展以概念地图为基础的学科概念以及更高层知识的理解型学习，我们已经有了专门的介绍理解型学习的《教得更少，学得更多》[1] 以及用理解型学习来开展小学数学学习的《小学数学这样学》[2]。在这一节中，我们来展示一个把概念地图用于代替大量做题来实现“题做得更少，概念学得更好，成绩更高”的目标的案例。

我们用鸡兔同笼问题当作学生遇到的第一道测试题。当然，这道题本身只能发挥锻炼一下大脑的作用，完全不实际。如果要变得更实际，可以做一个两种带电粒子的混合，各自有自己的个体重量（质量）和电荷量。通过测量总的电荷数和质量，就可以来得到每一种带电粒子的数量。一旦我们在解题过程中包含了“使得一个实际问题变成鸡兔同笼问题”，或者说把一个实际问题变成数学语言描述的问题，我们就到了更好的境界，理解到“数学是思维的语言，数学是描述世界的语言”的境界。这样的境界对于未来学习、创造性地应用和创造数学都是非常有意义的。这是图 3.7 左上角的内容。不过，现在我们先不关心如何使得一个实际问题变成鸡兔同笼问题这一步。

例 3.1 (鸡兔同笼问题). *一个笼子里面有鸡和兔子两种动物，总共有 10 个头，30 只脚，问鸡和兔子各几只？*

我们来看看这道题可以如何求解，求解的每一步，需要用到什么知识和什么思维。

首先，我们可以采用构造性解题方法，也就是通过某个巧妙的方式来

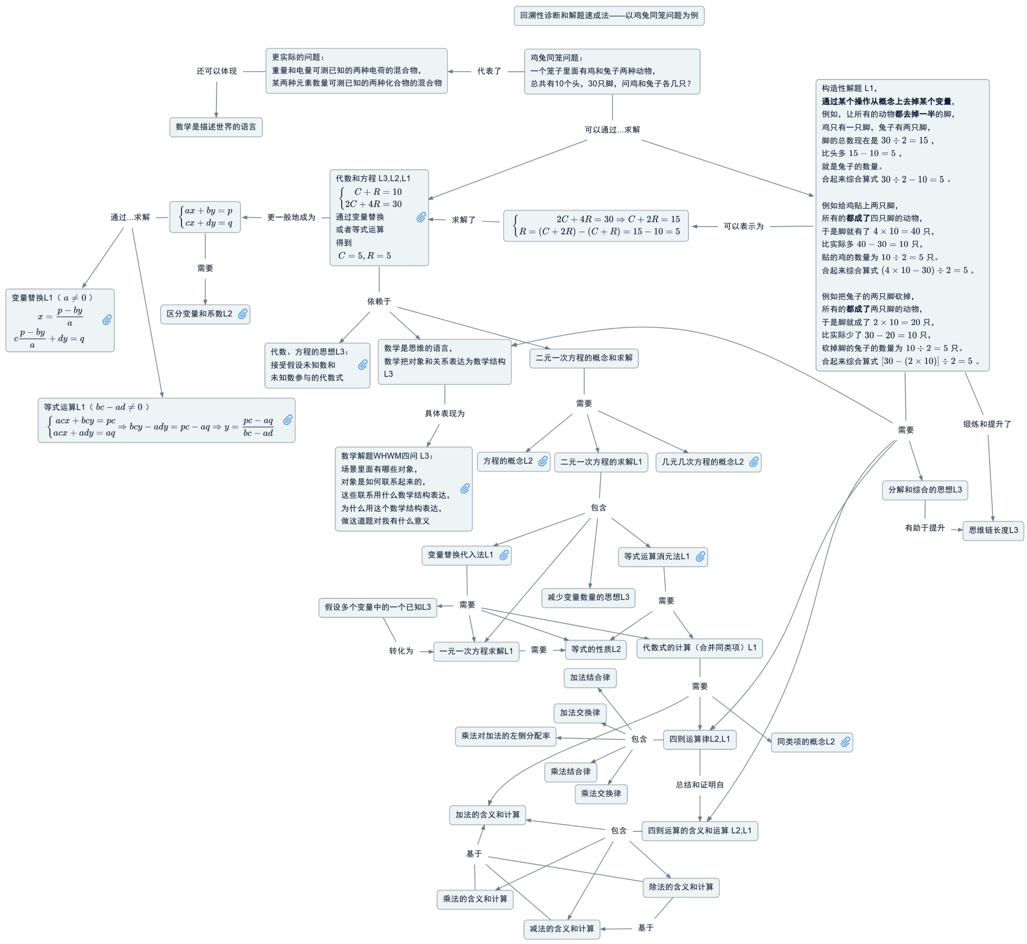

图 3.7: **概念地图用于回溯性诊断的例子**以一个假想的不会求解鸡兔同笼问题的学生的思考过程为例，通过概念地图帮助这个学生找到断点知识，从而实现做更少的题，学得更好的目的。这张图考虑整页印刷

构造一个思维链条，先把问题分解成这个链条上的多个步骤，然后融合这个链条的每一步形成一个综合算式。在这里，这个巧妙的方式可以是：让所有的动物都去掉一半的脚，给鸡贴上两只脚，把兔子的两只脚砍掉。这个操作的核心是从概念上去掉某个变量，通过让某些变量变成相同的方式。

所有的动物都去掉一半的脚，得到脚的总数为 $30 \div 2 = 15$，就得到了鸡的脚和头一样多，兔子的脚比头多一个，因此头的数量比脚的数量多的正好就是兔子的数量，也就是 $15 - 10 = 5$ 只。合起来综合算式，兔子的数量为 $30 \div 2 - 10 = 5$ 只。

给鸡贴上两只脚，所有的都成了四只脚的动物，于是脚就有了 $4 \times 10 = 40$ 只，比实际多 $40 - 30 = 10$ 只，因此贴脚的鸡的数量为 $10 \div 2 = 5$ 只。合起来综合算式，鸡的数量为 $(10 \times 4 - 30) \div 2 = 5$ 只。

把兔子的两只脚砍掉，所有的都成了两只脚的动物，于是脚就有了 $2 \times 10 = 20$ 只，比实际少 $30 - 20 = 10$ 只，因此砍脚的兔子的数量为 $10 \div 2 = 5$ 只。合起来综合算式，兔子的数量为 $(30 - 10 \times 2) \div 2 = 5$ 只。

实际上我们可能还可以找到其他巧妙的构造式解题的方式。不过，我们先只介绍这三种。

其次，我们还知道“假设未知数-列方程-求解方程”的解法。例如，我们假设兔子的数量已知记为为 R，鸡的数量已知记为为 C，于是，我们就能得到总的脚和头的数量为

$$\begin{cases} R + C = H = 10, \\ 4R + 2C = F = 30. \end{cases} \tag{3.1}$$

注意这里的写下来方程这一步其实非常深刻，我们需要找到一个问题中的主要对象，这些对象之间的关系，把这些关系转化为数学表达式。

在这里，我们插入一下关于 WHWM 数学解题四问[3]的介绍——它是一个找到对象和关系把关系写成数学表达式的方法。WHWM 数学解题四问指的是在面对数学题的时候问以下四个问题：

[3]未来我们会看到，WHWM 中的 What 和 How 是往下分解进入到一个问题的内部，而其中的 Why 的问题则是回到这个问题的整体，Meaningful 的问题则是跳到更高的层次，往往可以帮助学习者看到这个问题对于学习者个体以及对于学科的意义。这样的进得去出得来就是上下贯通或者说系联性思考，或者说系统思维的表现。

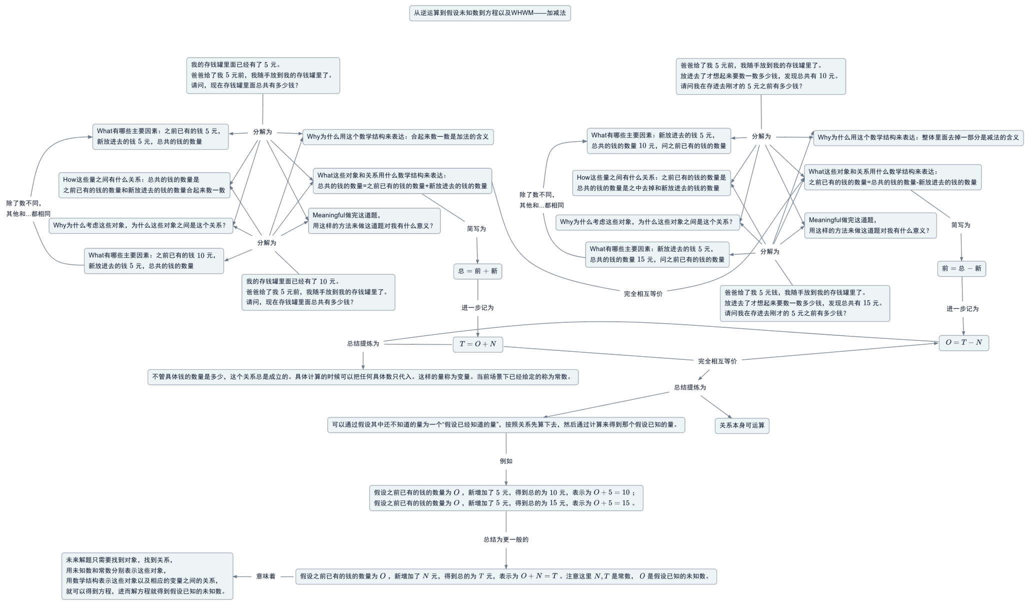

图 3.8: **通过 WHWM 找到对象和关系的数学表达式——加减法**。以具有“合起来数一数”和“整体中去掉一部分”的关系的事物为例，展示了如何从提出和回答 WHWM 四个问题来找到对象和关系的数学表达式。这张图考虑横版整页印刷

- What：这个场景下有什么对象，
- How：对象之间如何相互联系，这个联系如何用数学结构（数学运算，数学概念，数学表达式）来表示，
- Why：为什么我们主要关注这些对象，为什么这些对象之间是这样的关系，为什么这些关系用这样的数学结构来表达
- Meaningful：这道题我肯定做对了吗，有什么其他方法吗，做了这道题之后我有什么收获这道题对我有什么意义，我学到了什么？

在写下来这些对象的关系表达式之后，还需要把某些量当作变量，或者说未知数，把另一些当作常数，或者说尽管可以是任意的但是在特定场景下实际上是或者当作是已经给定的数。我们把这个 WHWM 方法和假设未知数或者变量已知的思想专门整理成了另一张概念地图，如图 3.8。

图 3.8，我们举了特别简单的分解具有“合起来数一数”（例 3.2）和“整体中去掉一部分”（例 3.3）的关系的事物，来展示如何从提出和回答 WHWM 四个问题来找到对象和关系的数学表达式。

例 3.2 (加法关系问题 WHWM 举例). *存钱罐里面已经有了 5 元。爸爸给了我 5 元钱，我随手放到我的存钱罐里了。请问，现在存钱罐里面总共有多少钱？*

我们来按照 WHWM 的方式来展示一下这个 WHWM 数学解题四问可以如何帮助我们解决这道题。

如图 3.8 的左侧，我们发现，这里的主要对象是：之前已有的钱 $O=5$(元），新放进去的钱 $N=5$(元），总共的钱的数量 T。它们之间的关系是：之前已有的钱的数量和新放进去的钱的数量“合起来数一数”得到总共的钱的数量，也就是说 总共的钱的数量 $=$ 之前已有的钱的数量 $+$ 新放进去的钱数量，或者简写为 总 $=$ 前 $+$ 新，或者用英文单词的首字母表示为 $T=O+N$。

进一步我们发现，一旦我们把三者之间的这个关系以及这个关系的数学表达式找到，我们就可以来完成稍微一般点的问题了。例如，无论“之前已有的钱的数量”、“新放进去的钱的数量”如何改变，“得到总共的钱的数量”和它们之间的关系没变。于是，我们找到的算式 $T=O+N$ 可以用于 O 和 N 的任何具体数的计算。也就是，任何 O 和 N，代入到这个关系 $T=O+N$，我们都可以得到总的钱的数量 T。这个时候，O、N 都具有了变量的功能——可以是给定的任意的数。

例 3.3 (减法关系问题 WHWM 举例). *爸爸给了我 5 元钱，我随手放到我的存钱罐里了。放进去了才想起来要数一数多少钱，发现总共有 10 元。请问我在存进去刚才的元之前有多少钱？*

我们还是来按照 WHWM 来解决这道题。

如图 3.8 的右侧，我们发现，这里的主要对象是：新放进去的钱 $N=5$(元），总共的钱的数量 $T=10$(元），之前已有的钱 $O=5$(元）。它们之间的关系是：总共的钱的数量之中“去掉”新放进去的钱的数量就得到之前已有的钱的数量，也就是说 之前已有的钱的数量 $=$ 总共的钱的数量 $-$ 新放进去的钱数量，或者简写为 前 $=$ 总 $-$ 新，或者用英文单词的首字母表示为 $O=T-N$。进一步我们发现，一旦我们把三者之间的这个关系以及

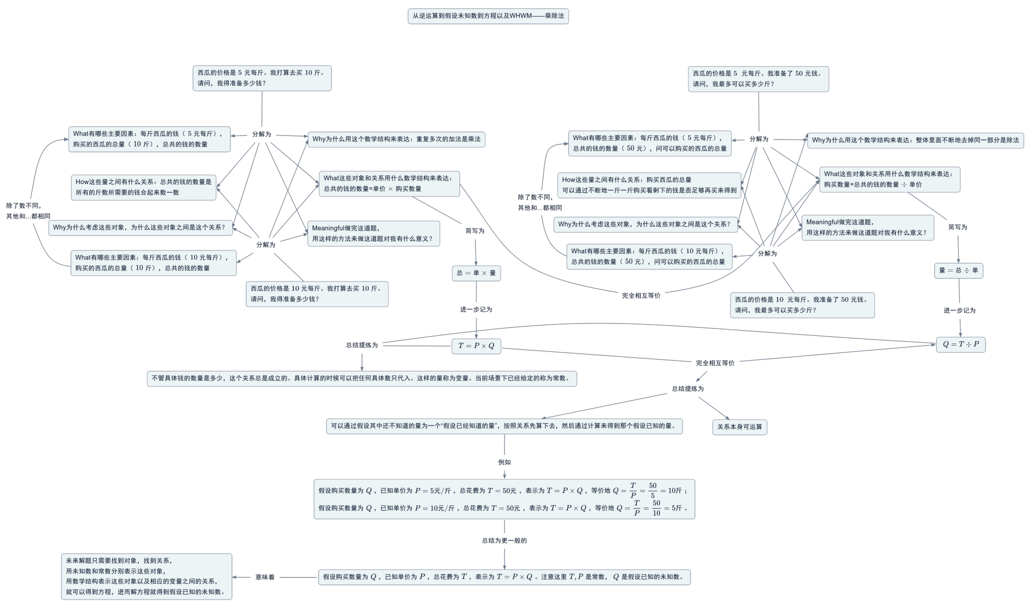

图 3.9: **通过 WHWM 找到对象和关系的数学表达式——乘除法**。以具有“重复多次的加法”和“整体中不断地去掉同一部分”的关系的事物为例，展示了如何从提出和回答 WHWM 四个问题来找到对象和关系的数学表达式。这张图考虑横版整页印刷

这个关系的数学表达式找到，我们就可以来完成稍微一般点的问题了。

更进一步我们发现，其实，例 3.2 和例 3.3 之中得到的数学表达式，或者说还原到具体对象以后，完全一致。也就是说，一旦我们搞清楚关系，写下来这个关系对应的表达式，其实，把哪些当作常数，哪些当作变量，都是可以的。于是，实际上，未知数和常数的唯一的区别仅仅在具体场景中哪些当作给定哪些当作要求出来的对象而已。也就是说，除了未知数用字母表示其他常数都用具体的数来表示的方程我们已经学会怎么列出来和理解之外，其实，我们也已经能够列出来和理解表达式中甚至没有任何一个具体数的方程。稍后，我们将来求解这样的没有具体数的方程。

实际上，为了完整性——小学阶段的主要关系就是加减乘除这四种（其实你已经看到加和减算一种，乘和除算一种）关系以及这些关系的组合，我们在图 3.9 中以具有“重复多次的加法”和“整体中不断地去掉同一部分”，也就是乘除法的关系的事物为例，展示了如何从提出和回答 WHWM 四个问题来找到对象和关系的数学表达式。这部分我们就不再详细展开了。请

读者参考前面的加减法关系的 WHWM 的图 3.8 来自己阅读图 3.9。

注意，在运用 WHWM 数学解题四问的时候，实际上，我们也需要用到描述具体场景的对象所需要的相应的数学结构的知识，例如这几道例题所需要的加减乘除。

好了，假设，现在我们已经可以用 WHWM 方法来写出来鸡兔同笼的方程。我们来看看，还需要什么才能把完成这个问题的解答。

在得到这个方程之后，这个方程可以用变量替换代入法和等式运算消元法。我们先来展示一下等式运算消元法。例如，我们把第二行除以 2 就得到了 $2R+C=15$，通过对比第一行，我们发现，$R=(2R+C)-(R+C)=15-10=5$。或者，我们把第一行乘以 4 得到 $4R+4C=40$，通过对比第二行，我们有 $2C=(4R+4C)-(4R+2C)=40-30=10$，于是 $C=5$。或者，我们把第一行乘以 2 得到 $2R+2C=20$，通过对比第二行，我们有 $2R=(4R+2C)-(2R+2C)=30-20=10$，于是 $R=5$。你仔细对比前面的三个构造式解题，正好和这三个等式计算消元法一一对应。也就是说，这里的综合多个步骤的思维链和算式的巧妙构造其实不过就是方程求解方法的另一种表现形式。注意，等式运算消元法的基础是等式的性质。

变量替换代入法的理念是，我们把其中的某个或者某些待求解出来的变量当作一个已知的数，例如，我们假设 C 是已知的，那么，通过第一行就得到 $R=10-C$，于是，我们就可以把这个得到的 R 的在假设 C 已知的条件下的表达式带入到第二行方程得到 $4\times(10-C)+2C=30$，也就是 $40-2C=30$，于是 $C=5$。注意，这里的变量替换代入法和等式运算消元法都依赖代数式的计算。

也就是说，如果我们可以写下来方程，则就剩下方程求解的问题，而方程求解可以用两种不同的方式来完成，其中，等式运算消元法的进一步依赖于等式的性质；变量替换代入法依赖于假设一个未知的数为已知，也就是变量和常数之间的转换，或者说代数的思想；同时，变量替换代入法和等式运算消元法都依赖代数式的计算。

这时候我们就可以通过求解二元一次方程的题来考察学习者对于这部分具体知识掌握得怎样。更一般地来说，我们还可以考察所有得常数都用字母表示的更加一般的二元一次方程的求解来考察学习者对于这部分具体知识掌握得怎样。这就是图 3.10 中的习题的作用。

用变量替换法求解方程（会遇到负数）

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

用变量替换法求解方程（不会遇到负数）

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

用等式运算法求解方程（会遇到负数）

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

用等式运算法求解方程（不会遇到负数）

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

用变量替换法求解方程，其中未知数是 x, y ，其他字母代表方程的常数系数

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

用等式运算法求解方程，其中未知数是 x, y ，其他字母代表方程的常数系数

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$$

图 3.10: **具体常数和字母常数的二元一次方程的求解习题**。通过这些习题，可以判断一个学习者是否学会了求解具体常数，或者更进一步字母常数的二元一次方程的求解。

图 3.11: **关于整式和单项式的元和阶的习题**。通过这些习题，可以判断一个学习者是否学会了了判断整式和单项式的元和阶。进一步可以设计一些找出和合并同类项的体系来检验一个学习者是否掌握了合并同类项。

我们实际上还可以展开“代数式的计算”，看看它需要哪些更加基本的知识和思维。在图 3.7 中我们就做了这样的展开。我们发现，代数式的计算需要四则运算律，需要识别出来同类项，在识别出来同类项之后的计算合并同类项的时候我们还需要更好地理解加法（也就是无论单位是什么，只要在同样的单位下，保持着这个单位，加法都可以进行 $2+3=5$，$2x+3x=5x$,$ax+bx=(a+b)x$）。同类项的识别进一步需要整式和单项式的元和阶的概念。这部分我们可以通过图 3.11 中的习题来考察。

类似地，四则运算律实际上在小学阶段来自于对具体运算的含义和计算结果的进一步抽象。把这样的知识之间的联系进一步分解出来就是图 3.7 中下部的内容。如果我们要进行完整的回溯性诊断，则这样的展开必须都做出来，然后给每一个数学概念、数学计算、数学思维配上一个基本上仅仅考察这单独的一个概念、计算和思维的习题。不过在这里，剩下的习题就不给大家展示了。

什么是回溯性诊断以及为什么它需要概念地图

有了前面这个具体的回溯性诊断的例子，现在，我们来抽象地讨论一下什么是回溯性诊断以及为什么它需要概念地图。回溯性诊断的目的是帮助学生在遇到不会做习题的时候，找到到底什么地方不会导致的这个习题不会做。“找到到底什么地方”指的是什么呢？是这个知识所依赖的更加基

础的知识都会但是这个知识（以及一般来说，所有建立在这个知识的基础之上的其他更加复杂的知识也）不会的那个知识。就是从底下更基础的知识走上来，一直都通，直到到这个知识就走不通了。因此，我们把对于一个给定学习者的这样的知识称为这个学科者的断点知识。

对于每一个知识点的掌握程度，可以用关于这个知识点的单纯题来测试。所谓关于某个知识的单纯题就是，这个题只需要这个知识就能够求解出来。实际测试中，如果做不到真正的单纯题，也就是没有仅仅用到这个知识的习题，那就尽可能地采用接近单纯题的问题，例如需要这个知识再加上很少很少的最好还是更加简单的其他知识就能够求解出来的问题。我们把这样的问题称为近似单纯题。

原则上，断点知识可以从底下更基本的知识检测起，直到遇到那个不会的。但是，这样的检测对于大多数人，可能都在花时间在已经会的知识上。因此，另一个办法就是在遇到已经发现不会的习题的时候，从高处往下走，一直走到会的。

于是，你就可以发现，很显然，这个回溯性诊断的背后是知识之间的逻辑关系，也就是概念地图。同时，当我们检测每一个概念的时候，我们希望尽可能地保证所用的习题基本上只考查这个知识本身，或者至少保证不考察学习者掌握情况不明的同层的以及更加复杂的知识，最多只能依赖于这个知识的下层更基础的知识。这时候，我们就需要有一个题库，并且是已经做好了从题到概念的标注的题库。

更进一步，一道题不会，往往不仅仅是相应的学科概念知识不会，很有可能是没有相应的运用这些学科概念知识的知识，分析问题的方式等等这些更高层次的知识不会。也就是说，除了学科概念知识，我们还需要考察一个学习者是否掌握求解者道题所需要的学科典型分析方法、学科典型思维方式，以及更一般的人类思维，例如批判性思维（以及其所依赖的逻辑思维）、系联性思考、科学研究方法等。

在具体针对某一个问题开展回溯性诊断的时候，大概可以采用以下的步骤：

1. 求解这个问题；
2. 对这个问题的每一个解法，找出来想到和完成这个解法直接所需要的各层知识，包含经验体验、事实性程序性知识、学科概念知识、学科

大图景、一般型人类思维以及教和习的方法；

3. 对于这些直接知识，做近似单纯题测试；
4. 对于被试没有掌握的直接知识，利用多层知识网络，找到支撑这个直接知识的知识，称为这个问题的间接知识；
5. 开展这些间接知识的近似单纯题测试；
6. 对于被试重复没有掌握的间接知识，继续这个拆分和测试的过程，直到所有的知识被试都掌握。

这样就找到了断点知识，必要的时候可以帮助这个被试从其已经掌握的知识重新构建起来整个知识的大厦，甚至重新做回溯性诊断。

因此，我们自然地看到了，如图 3.12 所示，回溯性诊断背后的概念基础是理解型学习的知识的层次，其实践基础是已经标注好的从习题到各个层次的知识的标注，以及各个学科甚至整个所有人类知识的多层知识网络——人类知识高速公路。关于这些进一步的概念的详细解释，请参考《教得更少，学得更多》[1]。

3.3.3 能力图谱构建

顺便，从教育的角度，从能力和素养的角度，多$\boxed{F}$嗦几句本书的题外话。我们实际上可以用回溯性诊断里面展示的方式对任何一个问题的解决过程做拆分，找到其直接所依赖的各个层次的知识，尤其是学科大图景层次之上的高层知识，然后依赖概念网络走到其间接依赖的更加基本的知识，中间再结合习题问题到知识网络的标注来考察其是否掌握这些直接和间接知识。实际上，这就是从问题解决能力到知识的拆分，反过来也就是从学习知识到获得能力的过程。因此，只要我们选择一批典型问题、典型任务，做好从整体问题到子问题、从问题到不同层次的知识 [1] 标注和分类，我们就可以构建任何一类问题的解决所需要的各个层次的知识的分解，进而帮助到培养。这其实就是所谓的能力图谱，而且在我们这里是可落实的可操作的明确的具体的联系到各个层次的知识的，并且是可以做检验的——也就是去实际测量一下被试是不是掌握了拆分出来的每一个知识的被试就能

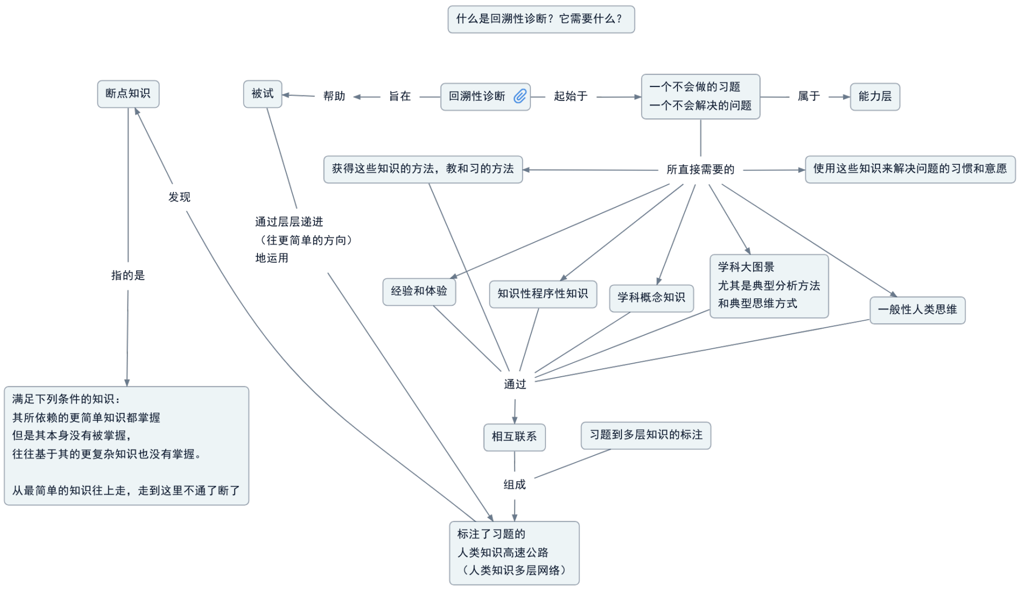

图 3.12: **什么是回溯性诊断以及它需要什么**。回溯性诊断可以帮助被被测试的学习者找到知识断点。它通过层层递进地运用知识之间的从复杂到简单的依赖关系，以及运用从习题到知识的标注来达成这个功能。因此，它在实践上需要标注了习题的人类知识高速公路，在理论上需要人类知识高速公路上以高层知识生成器为目标的理解型学习。

够完成这个整体任务解决这个整体问题，是不是不能完成这个整体任务不能解决这个整体问题的都是至少不掌握拆分出来的每一个知识之一。因此，这里的从典型问题和典型任务做各层知识分解的方法其实是一个一般性地构建能力图谱的方法。

Lev Landa（列夫 · 兰达）在 [33] 中也做了类似的分解，以直角三角形概念的理解和运用它来识别直角三角形为例，只不过不是通过概念地图的形式。在这里，我们把这个例子用概念地图的方式重新绘制了一下，如图 3.13。实际上，我们是自己对小学三四年级的被试做了识别直角三角形的实验，发现，有很大一个比例的被试就算能够识别三角形和直角，但是，当给了直角三角形的定义，并且在完全理解这个定义的意思的情况下，仍然不能识别出来直角三角形。我们发现，考虑了被试是否掌握更加一般的如何学习和使用概念这一点，也就是定义中不出现的特征不能加入运用定义时候的判断，必须通过定义建立这个定义到更加基本的对象的定义的联系，这个比例就会降低很多。于是，我们发现，如果我们把可以正确识别直角三角形当作一个任务，来看这个任务对应的能力，不仅仅人们需要掌握更加基本的直角、三角形的定义、直角三角形的定义的文字含义，还需要掌握这个一般的如何学习和使用概念这个思维层面的技能。

回到被试的情况，为什么会出现这么大比例的被试不掌握从定义来理解三角形呢？实际上，这一定程度上在当前的教学设计教材设计中是有意的——当前的教材把很多概念的学习分成了形象思维和抽象思维两个层次而且这两个层次往往在不同的年级来教和学，尽管我不能理解这个有意又是为了什么。具体到直角三角形，当前的教材，在五年级之前应该都是企图从形象思维的角度让孩子们大概能够感觉到什么是直角三角形就行，而只有到了七八年级才认真严肃地来学习直角三角形的概念。这个和理解型学习的核心理念——知识有层次每个学段可以要求的层次不同，但是每个层次都要做到“要学就要学清楚”——是完全不同的。按照理解型学习，如果为了获得直角三角形的经验和体验，则连直角三角形的概念都不需要教，直接接触一下直角三角形就够了，但是，一定要做到，如果真的教和学直角三角形的概念，则这个概念的内涵和外延都是完整和正确的；同时，任何时候，只要开始学习概念了，就要明白一个概念只有在定义中明确写下来的特征才是需要遵从的。这些地方如果搞错了，为了要花费大量的额外的努

力才能纠正过来。

实际上，对于一个学科的典型问题，一个岗位的典型任务，我们都应该用这样的拆分和实验的方式来找出来对应的各个层次的知识。然后，我们来做这些拆分出来的各个层次的知识的统计分析，对相应的知识做一个重要性排序，同时考虑其相互依赖的关系——通过多层知识网络。这才是可以落地的可以检验的能力图谱。

为此，我在这里顺便呼吁：**为了每个人都成为更力更高的人，大家一起来，做好人类知识多层网络的建设，做好从习题和项目等问题到知识网络的标注，做好理解型学习的核心理念概念工具的普及**。这实际上就是系统科学帮助解决教育教学问题的案例：通过认识到和运用不同层次的知识以及知识之间的关系，问题和多层次知识之间的关系，我们可以帮助学生们学得更好，帮助老师们教得更好（从而最终还是帮助学生们学得更好）。我们称其为教育系统科学 [34]。

实际上，不仅仅在知识的掌握上，概念地图可以用于回溯性诊断，实际上，如果我们有一个描述产品的功能和结构的产品概念地图，我们也可以来做产品的功能问题的逐层诊断。前面的自行车就是这样的场景的最初步的例子。因此，这一节的例子实际上是相互联系的。产品可靠性是这样的场景的一般名称。你已经可以初步看到概念地图将会在产品可靠性问题的分析中发挥作用。

3.4 网络用于描述系统和解决问题的案例

我们在之前通过空手道俱乐部的例子已经看到了网络用于描述一个社团中的人际交往以及通过这个人际交往数据来运用网络分析方法得到解决关于这个原始场景的问题——在那里是是否可以预测社团分裂以后的结果。网络除了把对象以及对象之间的关系描述为一个矩阵这样的一个数学对象——以及在更加复杂的场合区分顶点和连边的类型之后成为多层多关系网络或者说张量这个数学对象——之外，还有一些对网络开展分析的方法，例如之前已经提到的网络聚类分析。在这里，我们先来通过一个例子学习几个最简单的网络分析方法。

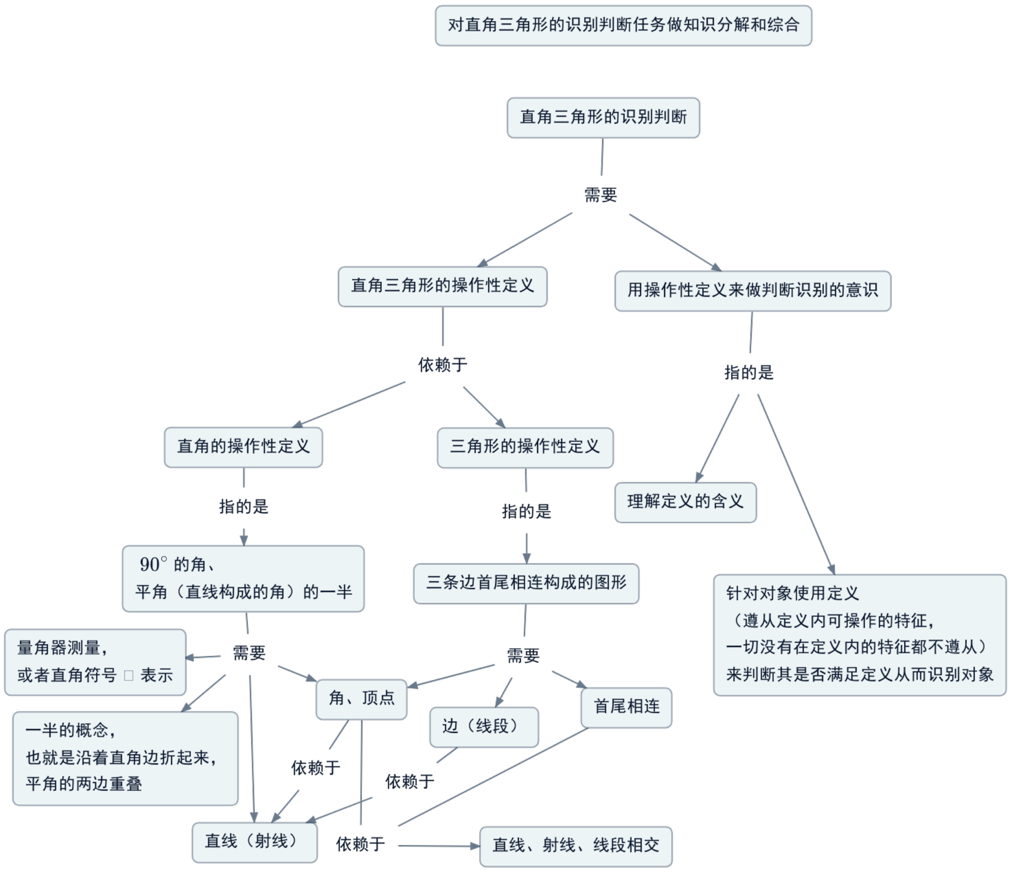

图 3.13: **“运用直角三角形概念来识别直角三角形”任务的能力图谱**。通过对“运用直角三角形概念来识别直角三角形”任务做分解以及开展相应的实验检验，我们发现，必须加入被试是否掌握更加一般的如何学习和使用概念这一点。

3.4.1 网络简单直接和间接统计量指标用于解决问题的例子

有了网络我们就可以来定义一些网络上的统计量，然后我们就可以用这些统计量来理解一些事情和解决一些问题。当然，实际上，也可能是由于我们需要理解或者解决某个问题，从而启发或者说逼迫我们去提出网络的统计量从而发展网络科学本身。在这一节，我们来介绍几个特别简单的统计量，然后来看看这些统计量描述和解决问题的例子。

我们先考虑最简单的网络，单一类型的顶点，单一类型的连边，并且连边只有两个值 $W^i_j = 1, 0$ 分别表示有和没有一条从顶点 i 到顶点 j 的连边。至于顶点代表了什么具体对象，连边代表了什么具体关系，这个到了网络所描述的实际问题里面再说。很自然，有了矩阵 $W = \left(W^i_j\right)_{N\times N}$，我们就可以计算这个矩阵的各阶乘积，$W^2, W^3, \cdots, W^n, \cdot$。

网络帮助理解六度分离。

网络帮助识别神经推行性疾病（Alzheimer）

3.4.2 网络帮助理解和干预传染病的传播

描述传染病的传播是网络的一个很好的应用场合。在没有网络的时代，传染病模型是基于均匀混合的类似溶液中的化学反应的方式来描述的。也就是任意时刻，整个空间中任何一个点上都有一定比例的被感染者 (I)、健康但是可以被感染的人 (S)，或者再加上恢复者 (感染过后不能被再次感染，或者可以被再次感染但是和第二类被感染的概率不同的人)、潜伏者（携带了传染源但是还没有被诊断出来的有或者没有传染能力的人)，并且这个每种人的比例再空间各点处处均匀。接着，就考虑再每一个这样的点上——因为各个点都一样也就不再需要考虑空间因素——这些不同的人之间发生转化的概率或者说速度。用数学方程来描述就是，

$$\frac{di}{dt} = \lambda si - \gamma i, \tag{3.2a}$$

$$\frac{ds}{dt} = -\lambda si + \gamma i. \tag{3.2b}$$

其中 $i = \frac{I}{N}$，$s = \frac{S}{N} = 1 - i$，$N = I + S$ 是总人口数。由于 $s + i = 1$ 这里的第二个方程其实是多余的。我们只需要关注第一个方程。这个方程左侧代表被感染者比例增加的速度，右侧第一项表示每次一个感染者遇到一

个健康但是可以被感染的人就会以一定的概率转化为一个被感染者。于是，在整个群体中这样的事件发生的速度跟这两种人的比例的乘积成正比。右侧第二项表示，一个感染的人有可能会成为一个健康的人而不再成为一个感染者。注意，由于这里只有两类人，实际上，这个恢复者被我们这里当作可以再一次感染。如果出现恢复以后就不再能被感染的情况，我们需要引入第三类人。

这个方程实际上可以理解为如下的一个化学反应

$$S + I \to 2I, \tag{3.3a}$$

$$I \to S. \tag{3.3b}$$

当 $i \ll 1$ 的时候，我们可以把上面的方程近似为

$$\frac{di}{dt} = (\lambda - \gamma)\, i. \tag{3.4}$$

我们发现，这个时候，如果 $R_0 = \frac{\lambda}{\gamma} > 1$ 则感染者就会增加，也就是传染病就会发生。因此，这个 R_0 就被称做基本再生数。对于可以用这个模型描述的传染病，我们可以想办法从实际数据中估算出来这两个参数，然后计算 R_0，就可以大概知道这个传染病的传染性有多强。对于不得不用更加复杂的模型描述的传染病，我们重复这个分析，也可以得到类似的这样的可以用来评估这个传染病的传播能力的再生数。

为了后面的数学表示方便，我们还可以把算式 (3.2) 写成感染人数而不是感染比例的形式，

$$\frac{dI}{dt} = \lambda SI - \gamma I. \tag{3.5}$$

到这里，我们没有看到网络。

一个考虑了空间不均衡性的模型可能对于很多的现象具有更好的描述能力，例如实际传染病传播之中经常出现某个地方先感染了传染病，其他的地方还很少的情况。这个时候，我们就需要引入某个地方 $\vec{r}$ 的被感染者比例 $i\left(\vec{r}\right)$，然后，我们得考虑带了空间因素的传染病传播模型。用数学方程来描述就是，

$$\frac{dI\left(\vec{r}\right)}{dt} = \vec{\nabla} \cdot D_I \vec{\nabla} I\left(\vec{r}\right) + \lambda S\left(\vec{r}\right) I\left(\vec{r}\right) - \gamma I\left(\vec{r}\right), \tag{3.6}$$

$$\frac{dS\left(\vec{r}\right)}{dt} = \vec{\nabla} \cdot D_I \vec{\nabla} S\left(\vec{r}\right) - \lambda S\left(\vec{r}\right) I\left(\vec{r}\right) + \gamma I\left(\vec{r}\right). \tag{3.7}$$

其中，右侧第一项表示从周围扩散而来的感染者和健康人，第二项表示再给定空间位置发生的传染病传播和恢复。这也表示，我们把空间的传染病传播模型看作两个步骤，先扩散再传播，或者说先扩散再反应。所以，这个方程也被称为反应扩散方程。原则上，这个方程仍然可以做近似求解或者数值求解。不过，我们在这里就不再展开求解的部分了。这个传染病的反应扩散方程相比不带空间的反应方程的好处是，适用于空间不均匀的情况。例如初始条件的不均匀性，或者这些系数的不均匀性，$D_I, D_S, \lambda, \gamma$ 都可以成为空间的函数，$D_I(\vec{r}), D_S(\vec{r}), \lambda(\vec{r}), \gamma(\vec{r})$。这个时候，我们就可以研究对于同一个传染病，不同地区的防控和治疗措施的效果了。

不过，到这里，我们还是没有看到网络。下面我们来引入传染病传播描述中的网络。为什么我们有了空间模型还会考虑网络呢？因为我们在空间模型中，扩散部分是局域的并且任何一个方向过来都是有可能的。但是，考虑我们人类真实的旅行，我们发现，飞行直接能够在空间位置上不同的点之间带来扩散，某些区域之间如果设置了防控措施可能就完全不能有扩散。因此，我们想描述这样的超越空间紧邻关系的扩散，就需要突破描述方式。实际上，可以考虑引入有位置空间，也就是把原来的空间距离改掉，重新定义不同区域之间的距离来描述 [35]。另一种方式就是定义每一个区域之间的明确的距离：考虑一系列顶点 $V = \{n = 1, 2, \cdots, N\}$ 和顶点之间的距离 $E = \{d_{mn}, m, n \in V\}$。例如，我们可以约定 $d_{mn} = 0$ 表示顶点 m, n 不连通，$d_{mn} = 1$ 表示顶点 m, n 连通。或者更一般地，$d_{mn} = 1$ 表示顶点 m, n 之间的距离的远近，$d_{mn} = \infty$ 表示顶点 m, n 不连通。

$$\frac{dI_n}{dt} = D_I \sum_m d_{mn} I_m + \lambda S_n I_n - \gamma I_n, \tag{3.8}$$

$$\frac{dS_n}{dt} = D_S \sum_m d_{mn} S_m - \lambda S_n I_n + \gamma I_n. \tag{3.9}$$

对于任意的连接矩阵 $D = (d_{mn})_{N \times N}$，这个方程除了数值求解之外基本没有办法求解。在一些对连接矩阵的简化假设的情况下，可以用平均场理论来近似求解 [36, 37]。其中在网络科学用于传染病的研究中起到很大推动作用的研究工作是 [37]：在那里，研究者们得到了一个看起来出乎意料的结果——在无标度网络（网络顶点的度是一个幂律分布函数，幂律分布函数在很多时候均值或者方差发散，也就是没有一个特定的度的大小是这个网络

上的顶点的度的通常大小，所以称为没有特定标度）上传染病的传播只要参数 $\lambda > 0$ 就不会自然演化到没有传染病的状态。

这个在无标度网络上没有传染参数阈值的结论是很有冲击力的。这表示，通过治疗等措施是不能控制传染的，并且只要这个接触传染的可能性存在，就算很小很小都是如此。那么，反过来，就表示如果要控制无标度网络上的传染病，我们就不得不破坏这个无标度性，也就是把某些连接断掉。这个时候，就有了到底哪些边需要优先断掉的问题，例如是那些邻居数量很多度很高的节点的边，还是某些其他的指标例如介数很大的边应该被优先断掉呢？这就使得这个研究领域进入到了有目标的防控措施：找出来对于控制某个传染病的传播来说最重要的顶点和最重要的边。原则上，这些研究就可以在实际传染病的控制中发挥作用了。

除了真实的传染病，人们还发现，其实，肥胖也可以按照传染病来做网络建模。一个在人际关系网络上的肥胖研究 [38] 发现，如果一位你认为是你的朋友的人是变肥胖，则你也变肥胖的概率增加百分十五十多；如果一位你不认为是你的朋友但是他认为你是他的朋友的人变肥胖，则你也变肥胖的概率几乎不增加；如果是一位你们两相互认为是朋友的人，则这个风险增加百分之一百七十多。兄弟姐妹、配偶之间也存在一个变肥胖会增加另一个变肥胖的风险。

其实，这个结果一定程度上是可以理解的：当我们的一个亲密伙伴变成肥胖以后，我们对于肥胖的态度可能就会改变，甚至，我们也会被这个伙伴的饮食和运动习惯影响。当然，从这个研究工作来说，主要是帮助更好地理解世界的。但是，实际上，我们也有可能可以基于这个工作做一些对于肥胖的提前干预。例如，是不是对于一个周围有好多胖子的人，我们就提前预警，提示其注意饮食和运动习惯。

复杂网络原则上可以描述所有的具有相互关联的对象构成的系统，只要你能够拿到这个系统的个体之间的关系的数据，能够把所要研究的问题表述为一个网络结构的问题、网络演化的问题、网络上的动力学现象的问题、网络上的现象和网络结构共同演化的问题、网络上的现象和网络的结构之间的关系的问题等等等等 [39]。复杂网络配合上连词构成的概念网络还可以更加完整地描述系统，原则上可以用于描述和研究任何一个包含多个相互作用的子系统构成的系统。甚至，在物理学上可以由哈密顿量描述

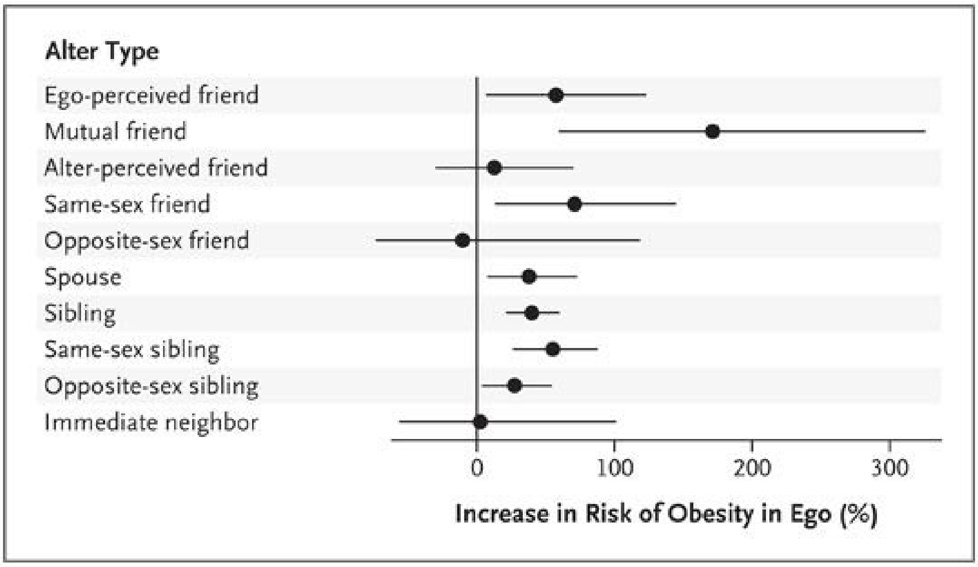

图 3.14: **从亲友关系来看肥胖的 "传播"**。研究发现，肥胖也像传染病一样可以在亲友关系网络上传播：一个人变肥胖会影响其亲友变肥胖的概率。图片来自于 [38]。需要去获取授权。

的系统，实际上我们也可以看作是由概念是粒子，连词是粒子之间的相互作用所构成的概念网络。我们知道由哈密顿量描述的系统在物理学里面是有完整的分析计算方法的。

下面，我们再来学习一个完全可计算的网络分析方法——贝叶斯网络。我们已经知道概念地图可以通过忽略连词成为网络。贝叶斯网络的第一个例子就来自于把这样的把概念地图简化为网络，然后把简化后的网络用于解决学习效果检测的问题。

3.4.3 贝叶斯网络用于检测学习效果

我们还是用之前的二元一次方程的例子，不过我们为了简单，只考虑图 3.7 的一小部分，仅仅考虑解法的分支，如图 3.15。首先，我们仅仅选择图 3.7 中关于“二元一次方程求解”的那一部分，并且向下分解也截止到“等式的性质”、“假设未知数”以及一元一次方程的求解为止。为了简单也忽略了中间的“减少变量数量的思想”。接着，我们忽略概念地图的连词，代替以条件概率表。也就是说，在图 3.15 中，所有的连边都代表一个条件概率关系：从若干个变量（$\vec{X}$）指向若干个变量（$\vec{Y}$）的边含义就是一个以起点变量为条件终点变量为目标状态的条件概率表（$P\left(\vec{Y}|\vec{X}\right)$）。变量之间根据条件概率关系构成的图就称为贝叶斯网络。一般来说，贝叶斯网络是无环的。

有了这个网络和条件概率，我们就可以做关于这些变量的任意概率的计算。注意，我们下面所有的计算将用到条件概率的定义，

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(AB\right)}{P\left(B\right)}, \tag{3.10}$$

和贝叶斯条件公式

$$P\left(A|B\right)=\frac{P\left(B|A\right)P\left(A\right)}{P\left(B|A\right)P\left(A\right)+P\left(B|\bar{A}\right)P\left(\bar{A}\right)}. \tag{3.11}$$

通过贝叶斯条件公式可以把条件和状态互换。我们在很多决策中需要从原因来推断结果，或者从结果来推断原因。因此，能够把条件变量和状态变量互换是非常有用的。实际上，贝叶斯条件公式不过就是用了两次条件概率的定义：首先，$P\left(A|B\right)$ 的分子是 $P\left(AB\right)$ 也就是两个变量都要出现某个特

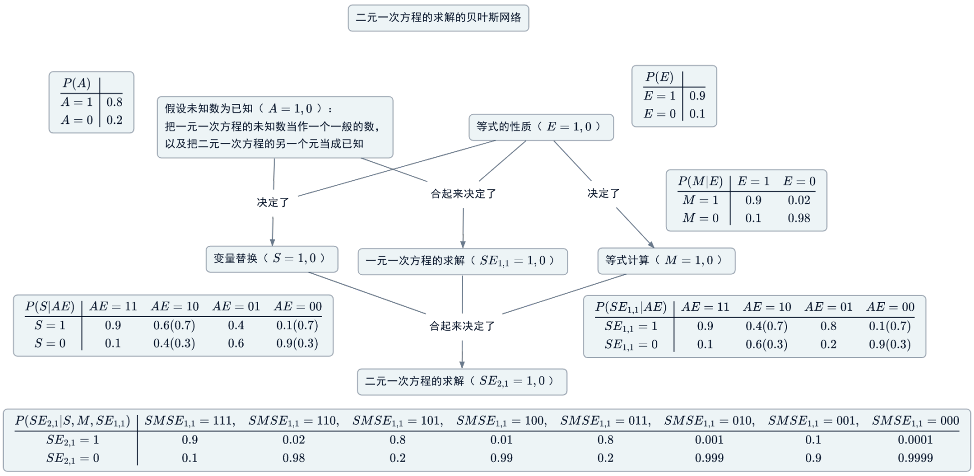

图 3.15: **贝叶斯网络用于检测学习效果**。我们把图 3.7 的一小部分忽略连词（或者说把连词一概替换为“决定了”）做成一个贝叶斯网络。贝叶斯网络的顶点在这里是知识点的掌握与否的状态，连边是条件概率上的依赖关系——在这里是要求更高的因果关系。每一个连边上放了条件概率。例如这里的 $P(A|AE)$。其中括号内的数值，例如这里的 0.6(0.7) 中的 0.7，代表在另一个群体中的使用值。

定的值，而

$$P(AB) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A). \tag{3.12}$$

其次，$P(A|B)$ 的分母是 $P(B)$，而 $P(B)$ 可以写成两个互斥和完备的条件 A 和 $\bar{A}$——如果 A 不是一个离散两状态变量则 $\bar{A}$ 指的是除了给定的 A 取值之外的所有可能——下出现 B 的概率的和，也就是

$$P(B) = P(BA) + P\left(B\bar{A}\right) = P(B|A)P(A) + P\left(B|\bar{A}\right)P\left(\bar{A}\right). \tag{3.13}$$

一个看起来这么平庸的把一个定义用了两次所得到的公式具有这么大的威力是一件特别神奇的事情。

例 3.4 (贝叶斯网络计算任意顶点组合的任意状态的概率). 根据图 3.15 中给出的贝叶斯网络，随便选一个被试其掌握等式的性质的概率 ($P(E=1)$)，或者掌握一元一次方程的求解的概率 ($P(SE_{1,1}=1)$)，或者已知一个被试其掌握了一元一次方程的求解 ($SE_{1,1}=1$)，推断其掌握二元一次方程的求解的概率 ($P(SE_{2,1}=1|SE_{1,1}=1)$)，以及推断其掌握等式的性质的概率 ($P(E=1|SE_{1,1}=1)$)，或者已知一个被试没有掌握一元一次方程的求解 ($SE_{1,1}=0$)，推断其没有掌握等式的性质的概率 ($P(E=0|SE_{1,1}=0)$)。

从贝叶斯网络图 3.15，我们直接读出来，$P(E=1)=0.9$，也就是如果我们在这些数据获取的样本所代表的世界中随便选取一个人，其掌握等式的性质（等式两边同时做加减乘除同一个数值或者说数值上相等的表达式等式仍然成立）的概率是 0.9。掌握一元一次方程的求解的概率 ($P(SE_{1,1}=1)$) 可以这样计算

$$P(SE_{1,1}) = \sum_{A,E} P(SE_{1,1}|A,E)P(A)P(E) = \begin{cases} 0.826 & SE_{1,1}=1 \\ 0.174 & SE_{1,1}=0 \end{cases}. \tag{3.14}$$

我们再来计算

$$P(SE_{2,1}|SE_{1,1}=1) = \sum_{S,M} P(SE_{2,1}|S,M,SE_{1,1}=1)P(S)P(M), \tag{3.15}$$

其中条件概率表 $P(SE_{2,1}=1|S,SE_{1,1},M)$ 已知，而

$$P\left(S\right)=\sum_{A,E}P(S|A,E)P(A)P(E)\begin{cases}0.77 & S=1\\0.23 & S=0\end{cases}, \tag{3.16}$$

$$P\left(M\right)=\sum_{E}P(M|E)P(E)\begin{cases}0.826 & SE_{1,1}=1\\0.174 & SE_{1,1}=0\end{cases}. \tag{3.17}$$

因此，我们得到

$$P\left(SE_{2,1}|SE_{1,1}=1\right)=\begin{cases}0.836 & SE_{2,1}=1\\0.164 & SE_{2,1}=0\end{cases}. \tag{3.18}$$

$$P\left(E=1|SE_{1,1}=1\right)=\frac{P\left(SE_{1,1}=1|E=1\right)P\left(E=1\right)}{P\left(SE_{1,1}=1|E=1\right)P\left(E=1\right)+P\left(SE_{1,1}=1|E=0\right)P\left(E=0\right)} \tag{3.19}$$

而

$$P\left(SE_{1,1}=1|E\right)P\left(E\right)=\sum_{A}P\left(SE_{1,1}=1|AE\right)P\left(E\right)P\left(A\right). \tag{3.20}$$

合起来得到

$$P\left(E=1|SE_{1,1}=1\right)=0.959. \tag{3.21}$$

类似地

$$P\left(E=0|SE_{1,1}=0\right)=0.379. \tag{3.22}$$

实际上所有的这些计算在已知贝叶斯网络图 3.15 之后都可以通过软件直接计算出来。这称为贝叶斯网络上的概率推断问题。那贝叶斯网络和每一条边上的条件概率又是怎么来的呢?

这称为贝叶斯网络的构建。这里有数据驱动、知识驱动和混合方法三种方式。所谓数据驱动就是从收集到的大量的被试的每一个知识点是否掌握的数据开始，构建最符合实际数据的贝叶斯网络，包含网络结构和连边上的条件概率。所谓知识驱动就是对于某些顶点之间的联系，我们人类是

清楚的。例如，二元一次方程的求解必然依赖于一元一次方程的求解。我们也可以尽可能地找出来影响这个子节点的所有的因素，把这些因素列为这个子节点的父节点。然后，剩下的问题就是通过数据来得到这些条件概率就可以。当然，你甚至可能可以从理论上有其他的考虑因素或者模型来给出来这些条件概率。那这就算知识驱动。混合方法就是把可以通过知识驱动来决定的结构和参数确定下来，然后让模型在此基础上来寻找和数据最相符的网络连接关系和条件概率。当然，实际上，除了结构上完全已经由知识确定的网络，其每一条边上条件概率的获得只需要按照条件概率的公式来计算之外，用算法来得到和数据最相符的网络结构和条件概率并不是一件平庸的事情。人们为此发明了各种算法 [40]。

合起来，我们就有了构建贝叶斯网络和在贝叶斯网络上做任意概率的推断计算的方法。如果说，我们在一个大样本中构建起来的贝叶斯网络还具有一定的通用性，那么，我们就可以用这个构建起来的贝叶斯网络去推断同样的群体[4]的各种概率。例如，我们针对某个某个学校和某个年级的学生构建出来的数学知识的贝叶斯网络是不是就可以用来推断这个学校的同一个年级的没有用来当训练样本的学生的关于是否掌握某些知识点的概率呢? 如果是，好像看起来我们就有了一个只需要检测少数的几个知识点，就可以来推断其他知识点的掌握状态的工具了。这样的话，我们就可以更高效地检测学生掌握了哪些知识点了。而且，这样的检测既可以是先测量基本概念，然后从基本概念的掌握状态来推断复杂概念的掌握，也可以反过来，先检测复杂概念的掌握情况，然后来推断简单概念的掌握情况。甚至，这样的推断还可以帮助学生做个性化学习。这样也就实现了上一节回溯性诊断的功能——帮助学生定位个性化的知识断点，然后再重新学习从而构建起来知识网络。

当然，实际上，如果我们把从一个国家的学生中训练出来的知识点掌握情况的贝叶斯网络直接迁移到用来推断另一个国家的学生的相应知识点掌握情况，可能是相当危险的。例如，在对于为基本学习方式的学校，实际上，学生完全可以做到 $P(S=1|AE=00)=0.7>P(S=0|AE=00)=0.3$，也就是说，就算学生既没有掌握假设未知数也没有掌握等式的性质，但是，这个学生仍然可以一相当高的概率 0.7 来把变量替换法操作对，甚至把一元一次

[4]尽管什么样的群体算同样的群体仍然是个问题。

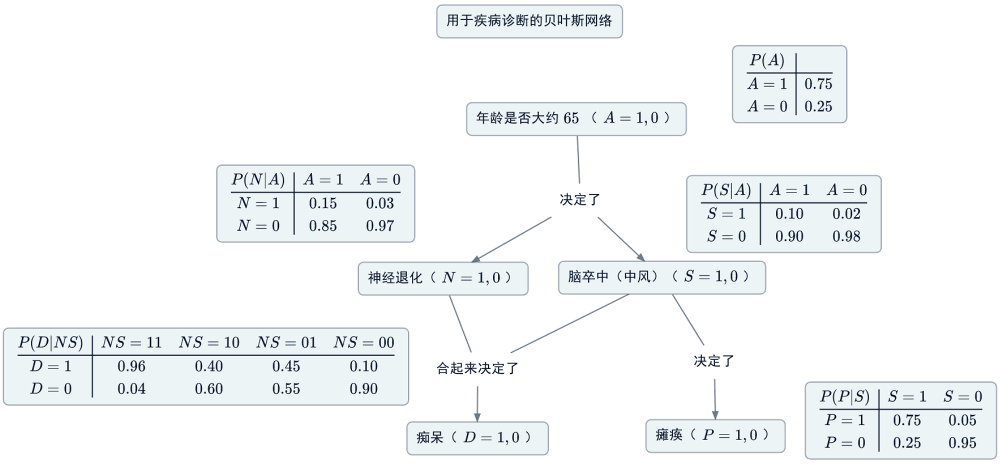

图 3.16: **贝叶斯网络用于疾病诊断**。为了展示贝叶斯网络如何用于疾病诊断，人们编制了一些接近实际的但是简化了的案例。这里是其中一张关于痴呆和瘫痪的主要因素的贝叶斯网络。模型来自于 [41]。

方程也求解正确 $P\left(SE_{1,1}=1|AE=00\right)=0.7>P\left(SE_{1,1}=0|AE=00\right)=0.3$。学生怎么做到的呢？他们通过大量地练习，记住了变量替换法和求解一元一次方程的步骤，所以完全可以跳过其前置概念的理解。

我们再来跳出来知识点掌握程度推断的背景，我们发现，这样的构建贝叶斯网络和在贝叶斯网络上做任意概率的推断计算的方法，可以用来帮我们解决大量的诊断性的问题。例如，我们可以问，当一个病人观测到有咳嗽的时候，他/她可能得了什么疾病；或者当一个产品的性能除了故障的时候，它可能是哪个元器件出了问题。它们都正好就是条件概率的问题。

下面我们分别给出来一个疾病诊断的案例，如图 3.16，和一个机器故障的案例，如图 3.17。注意，这两个案例为了教学的目的都做了大量的简化。实际使用的案例可以从 [40] 以及参考文献中看到。

有了贝叶斯网络结构图和条件概率以后的计算，例如计算病人痴呆的条件下可能的原因 $P\left(A,N,S,P|D=1\right)$，计算风扇噪音大的条件下可能的原因 $P\left(M,S,F,C,S,W|N=0\right)$ 和图 3.15 的例子完全相同。在这里，我们就不再举例重复了。

从图 3.15 中我们看到一个机器是否正常运行的问题 $P\left(W=1,N=1\right)$——称为可靠性问题，需要保证其中的大部分元器件和连接件正常运行。我

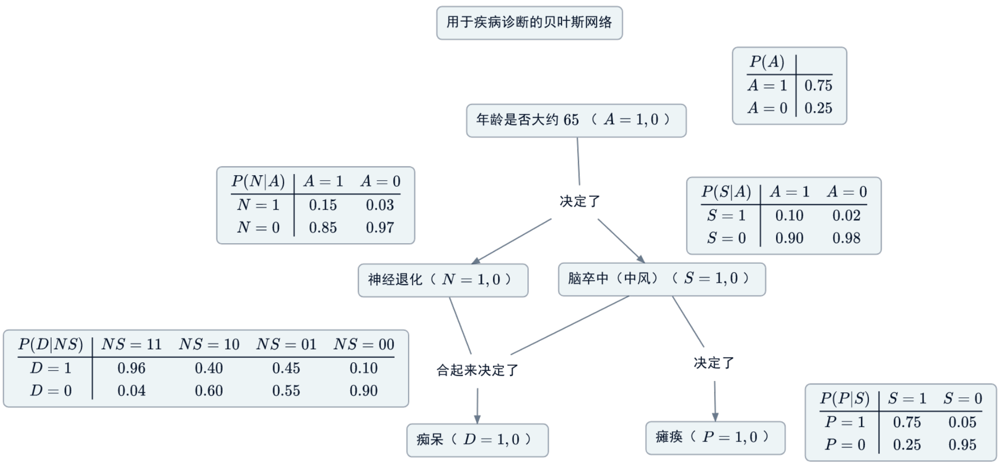

图 3.17: **贝叶斯网络用于机器故障诊断**。为了展示贝叶斯网络如何用于机器故障诊断，我们编制了简化了的风扇故障的案例。

们可以用贝叶斯网络来计算一个机器正常运作的可靠性，以及这个可靠性在给定工况下随着时间演化的情况。甚至，我们也可以在关于机器的运行状态的贝叶斯网络中增加工况节点，来把工况直接纳入关于及其运行可靠性的贝叶斯网络。而且，很容易看到，如果我们增加一个并联上线的备份电机，一旦原来的电机坏了就会自动启用，就可以进一步提高整体风扇的可靠性。

下面，我们即将看到，除了贝叶斯网络，投入产出分析也是完全可计算的网络，或者说是网络分析方法专门化的另一个案例。顺便，这也体现了网络是描述系统的骨架，或者说被简化成网络之前的概念地图是描述系统的骨架。这也是为什么概念地图和网络会被当作系统科学描述系统的最基本的方式的原因。

3.5 本章小结

在这一章中，我们介绍了什么是概念地图，什么是网络，以及两者的关系——从最一般的意义上两者完全相同（不过就是对象通过关系相连构成的系统的描述方法），但是通常概念地图简化以后可以成为单类顶点无权网，或者二部分网络（双类顶点无权网，连边仅仅出现在两类顶点之间，同

类顶点不相连）。因为其在最一般意义上完全相同，都是描述系统的方法，所以，我们有的时候就不再区分这两者，都称为“描述系统的骨架”。然后，我们用一些具体案例来展示了概念地图和网络分别如何来描述系统和解决问题。其中，回溯性诊断、能力图谱构建、贝叶斯网络用于诊断这几个案例本身也有其独立的意义：它们是可借鉴的解决相应类型的问题的方法。不过，更加重要的是，从这些例子之中，体会到什么是系统科学：系统是由元素通过联系构成的，其往往有某一个整体功能或者整体行为；系统科学的研究者，就是要描述这样的系统，理解系统这些整体行为和个体元素的行为和属性之间的关系，也就是从个体看到整体，从整体看个体；并且系统科学的研究者需要采用科学的方式——也就是科学研究方法（通过观测和实验得到现实的启发，概念建模和数学建模，实验检验，知识的系统化）——来达到这个目标。

第四章　综合直接和间接关系的广义投入产出分析

第五章　相变和整体行为，涌现性

动力学相变（陶哲轩翻转、陀螺稳定转动和倒下）、

第六章　复杂适应性系统——内部状态可变可优化

第七章　企业管理中的系统和科学

这些内容，包含说法、方法和例子（不显示具体内容，只给出描述）是否具有敏感性?

7.1　看到整体的流程性知识梳理

提升效率，优化流程，找到价值提升士气。面向过程的编程，面向对象的编程，输入输出，元素方法和接口。分解分解再分解指导学科知识或者价值观，综合综合再综合看到整体。

7.2　看到整体的科学研究

论文点评系统，学科知识网络

7.3　走到原理的问题解决

从对全部可能的试错，到有方向地有依据地检验

7.4　概念地图当作交流工具

从你的意思是不是就是这个意思，到这个意思和问题解决的关系

7.5 科学研究方法尤其是数学建模在企业

静态和动态优化问题建模、统计分析

7.6 上下左右贯通的人才培养

从基础学科以及基础学科之间到研究领域的贯通，从思维方式学习方法到具体学科的贯通，从最需要什么到如何培养的贯通

企业为什么要培养人才，而不是挑选教育系统提供的人才就可以？企业在人才培养和科学研究而不仅仅是产品研发上超越大学？

7.7 促进创新和人才培养的知识管理

Wilynk 知识管理和知识管理平台，问题库知识库建设

第八章　系统科学——不过就是对复杂系统的科学研究的结果

参考文献

[1] 吴金闪. 教的更少, 学得更多 [M]. 科学出版社, 2021.

[2] 吴金闪. 小学数学这样学 [M]. 浙江人民出版社, 2022.

[3] Popper K R. The Logic of Scientific Discovery (《科学发现的逻辑》) [M]. London: Hutchinson, 1934.

[4] 吴金闪. 《系统科学导引》第一卷 [M]. 科学出版社, 2018.

[5] 吴金闪. 《系统科学导引》第二卷 [M]. 科学出版社, 2019.

[6] Decartes R. Discourse on the Method (《谈谈方法》) [M]. Bartleby.com, 2001.

[7] Einstein A. Über die vonder molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhendenFlüssigkeiten suspendierten Teilchen(translated by H. D. Cooper in R. Furth, ed., Investigations on the Theory of Brownian Motion) [J]. Annalen der Physik, 1905, 17: 549–560.

[8] Uhlenbeck G E, Ornstein L S. On the Theory of the Brownian Motion [J]. Phys. Rev., 1930, 36: 823–841.

[9] 亚里士多德. 物理学（张竹明译） [M]. 商务印书馆, 2006.

[10] 伽利略. 关于托勒密和哥白尼两大世界体系的对话 (周熙良译) [M]. 北京大学出版社, 2006.

[11] 伽利略. 关于两门新科学的对话 (武际可译) [M]. 北京大学出版社, 2006.

[12] Euclid, edited by Heath T L. The Thirteen Books of Euclid's Elements, Books 1 and 2 （《几何原本》） [M]. New York, NY, USA: Dover Publications, Inc., 1956.

[13] 赵峥. 物理学与人类文明十六讲 [M]. 高等教育出版社, 2016.

[14] Mill J S. A System of Logic, Ratiocinative and Inductive: Being a Connected View of the Principles of Evidence, and the Methods of Scientific Investigation [M]. Cambridge University Press, 2011.

[15] Boring E G. The Nature and History of Experimental Control [J/OL]. The American Journal of Psychology, 1954, 67 (4): 573–589. http://www.jstor.org/stable/1418483.

[16] Lind J. A treatise of the scurvy [M/OL]. Sands, Murray and Cochran for A. Kincaid & A. Donaldson, 1753. https://www.mv.helsinki.fi/home/hemila/history/Lind_p105.pdf.

[17] Milne I. Who was James Lind, and what exactly did he achieve? [J/OL]. JLL Bulletin: Commentaries on the history of treatment evaluation, 2012. https://www.jameslindlibrary.org/articles/who-was-james-lind-and-what-exactly-did-he-achieve/.

[18] 艾萨克 · 牛顿. 自然哲学的数学原理（曾琼瑶译） [M]. 江苏人民出版社, 2011.

[19] 张苍、耿寿昌等整理，刘徽注，曾海龙翻译为白话文. 九章算术 [M]. 重庆大学出版社, 2006.

[20] 程贞一、闻人军翻译为白话文 . 周髀算经（参见《周髀算经译注》）[M]. 上海古籍出版社, 2012.

[21] Euclid, edited by Fitzpatrick R. Euclid's Elements of Geometry（《几何原本》） [M]. Lulu, 2012.

[22] 吴金闪. 二态系统的量子力学 [M]. 科学出版社, 2017.

[23] Wu J. Quantum transport through open systems [D/OL]. [S. l.]: University of British Columbia, 2011.

[24] L D Landau E L. Mechanics（李俊峰，鞠国兴译） [M]. Butterworth-Heinemann, 1976.

[25] Maxwell J C. On Physical Lines of Force [M] // Niven W D. In The Scientific Papers of James Clerk Maxwell. Cambridge University Press, 2011: 451–513.

[26] Maxwell J C. A dynamical theory of the electromagnetic field [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1865, 155: 459–512.

[27] 贝托尔特 · 布莱希特. 伽利略传（丁扬忠译）[M]. 上海译文出版社, 2011.

[28] 伽利略. 天体运行论 (叶式辉译) [M]. 陕西人民出版社, 2003.

[29] Kahneman D. Thinking, Fast and Slow（《思考，快与慢》（译者：胡晓姣，李爱民，何梦莹） [M]. New York: Farrar, Straus and Giroux, 2011.

[30] 吴金闪. 为什么教育需要系统科学 [J]. 北京师范大学学报（自然科学版）, 2023, 59(5).

[31] Zachary W W. An Information Flow Model for Conflict and Fission in Small Groups [J]. Journal of Anthropological Research, 1977, 33 (4): 452–473.

[32] Newman M E J. Networks: an introduction [M]. Oxford; New York: Oxford University Press, 2010.

[33] Landa L N. Landamatics Instructional Design Theory and Methodology for Teaching General Methods of Thinking [M] // Reigeluth C. In Instructional-design Theories and Models: A New Paradigm of Instructional Theory, Volume II. Routledge, 1999: 341–370.

[34] 吴金闪. 为什么教育需要系统科学 [J]. 北京师范大学学报（自然科学版）, 2023, 59 (5): 812–821.

[35] Iannelli F, Koher A, Brockmann D, et al. Effective distances for epidemics spreading on complex networks [J]. Phys. Rev. E, 2017, 95: 012313.

[36] Pastor-Satorras R, Castellano C, Van Mieghem P, et al. Epidemic processes in complex networks [J]. Rev. Mod. Phys., 2015, 87: 925–979.

[37] Pastor-Satorras R, Vespignani A. Epidemic Spreading in Scale-Free Networks [J/OL]. Phys. Rev. Lett., 2001, 86: 3200–3203. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.3200.

[38] Christakis N A, Fowler J H. The Spread of Obesity in a Large Social Network over 32 Years [J]. New England Journal of Medicine, 2007, 357 (4): 370–379.

[39] 吴金闪, 狄增如. 从统计物理学看复杂网络研究 [J]. 物理学进展, 2004, 24(1).

[40] Koller D, Friedman N. Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques [M]. MIT Press, 2009.

[41] Bielza C, Larrañaga P. Data-Driven Computational Neuroscience: Machine Learning and Statistical Models [M]. Cambridge University Press, 2020.

名词索引

人名索引

A | B | C | D | E | G | H | J | K | L | M | N | P | S | T | V | W | Z

插图

举例目录

作业目录