微积分
——关于累积量和变化率的语言

吴金闪

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f\left(\xi\right)d\xi = f\left(x\right)$$

微积分是描述累积量-变化率关系的语言

微积分是对累积量-变化率关系做推理的语言

学科大图景

教的更少，学得更多

理解型学习

2021 年 12 月 15 日

或者选下面的两张之一当封面：

$$\int_M d\omega = \oint_{\partial M} \omega$$

$$\Delta x \stackrel{?}{=} dx \stackrel{?}{=} 0?$$

No, but $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$

目录

献给

给常常被我逼迫的也经常逼迫我的学生们

致谢

感谢黄思应，由于其对数学的严肃的深入的不懈的又想偷懒的追求，才有了本书，一本遵循“教的更少，学得更多”，尽可能通过学习最少的具体知识来体会到微积分是什么。

在这里感谢老师、学生、家人

本书的电子版可以从网页“吴金闪的书们”找到。如果你是实体书的读者，需要输入网址的话，它是：http://www.systemsci.org/jinshanw/books。

前言

本书在数学内容上没有丝毫的创新，不过就是综合了十来本微积分的教材和科普书，找了一个逻辑上看起来更容易接受一点的体系来呈现前人完全已经知道的数学知识。

不过，本书最大的特点是，企图帮助学习者在学习任何一个具体数学知识的时候有一定的方向感，知道这个具体知识在整个微积分知识结构中的地位，以及通过学习这些具体数学知识体会到微积分是一个什么样的学科。同时，我们主张在有方向感和透过细节看到整体的前提下，所需要学习的数学知识越少越好。

为什么要有这样一本书，核心理念是什么，怎么用这本书。通过学习最少的具体知识，领会到什么是微积分，学会像微积分专家一样来思考，来创造性地运用微积分。大图景和具体知识交互学习，使得学习有方向。强调典型思维方式和分析方法。强调当时所面对的问题。强调知识的系统性。上下贯通，从具体问题到学科概念，到分析方法，到思维方式，到一般性人类思维以及教和学的方法。可以看做是“人类知识高速公路上以高层知识生成器为目标的理解型学习”[1] 的例子，就好像另一套数学物理系统科学的精简教材《系统科学导引》[2] 一样。

从直觉和（理论的或者现实世界需求的）问题出发，发展和掌握严密的逻辑和概念的体系，强调学科大图景，用最简单的例子来帮助熟悉和内化这个知识体系。

具体内容后续还会修订。整体思路和大纲基本如此。

第一章　世界需要微积分

在这一章里，我们通过非常不准确地回顾微积分发展的历史，尤其是我们要假装地并且是蜻蜓点水式地重新提出和解决其发展过程中的各个问题，来体会一下为什么世界需要微积分。

1.1　微积分是描述累积量和变化率这个关系的语言

微积分是描述累积量和变化率这个关系的语言，以及符合这个关系的一对或者多对量的语言。例如速度的时间累积是位移，力的空间累积是功（其实势能更准确），以及反过来，位移的时间变化率是速度，功（更准确地，势能）的空间变化率是力。

以后为了简单计，我们称累积量和变化率这对关系为积分-微分关系，或者更加符合微积分的语言习惯，称为微分-积分关系。

1.2　微积分是对微分-积分关系做逻辑运算的语言

发现了微分-积分关系了又怎么样呢？我们需要对微分-积分关系做逻辑推理，来得到一些基于这个关系能够得到的结果。这个时候，微积分的计算就是这个推理过程的语言。

Newton 的力学方程和微积分。

1.3　微积分如何开展研究和计算——无穷小

严密的逻辑体系，用最少的基本假设和基本概念构建整个概念大厦。

操作表达式。把一个对象，例如线段、面积，分下去，得到直到无穷小的极限下才正确的表达式（例如微分和积分的定义），回到有限大小仍然正

确的表达式（例如微分中值定理、积分中值定理），再合起来。

Maxwell 和 Maxwell 方程的对称性。

δ 函数和 Green 函数。

微积分概念体系自己的逻辑基础，极限，或者说无穷小。无穷小不是零，是一个过程，当然过程的最后结果，也就是在极限下等于零。从极限到连续，从连续到可导，导函数和原函数（不定积分），从极限到定积分，从定积分到不定积分。

1.4 需要微积分的其他典型场景

函数的级数展开，或者说级数近似，例如，Taylor 级数、三角级数（Fourier 级数）。从级数展开可以拓展到更一般的函数的基函数展开，例如函数的多项式展开、三角级数展开、Fourier 变换。从初等函数过渡到高等函数。

曲线下面积的 Newton 方法，多项式展开（Taylor 展开）。三角函数和信号传播、信号产生、频率空间。

求面积、求切线斜率，求累积量，求变化率。

把看起来不是微积分的问题变成微积分的问题，核心是发现微分-积分关系，例如把数论问题变成微积分的问题，把群论问题变成代数问题（李群到李代数）。

1.5 微积分发展线路图

从哪里走来，走到了哪里，要到哪里去?

从实数域上的极限，到实数域上的导数、微分和积分，到欧式空间（$\mathbb{R}^n$）上的导数、微分和积分，到任意流形上的导数、微分和积分。更容易识别和计算更多的微分-积分关系，无论在纯数学中，还是科学中。

1.6 需要学会的概念和计算

前面已经提到本书的写作思想是：从直觉和（理论的或者现实世界需求的）问题出发，发展和掌握严密的逻辑和概念的体系，强调学科大图景，用最简单的例子来帮助熟悉和内化这个知识体系。于是，我们只用下面这些具体

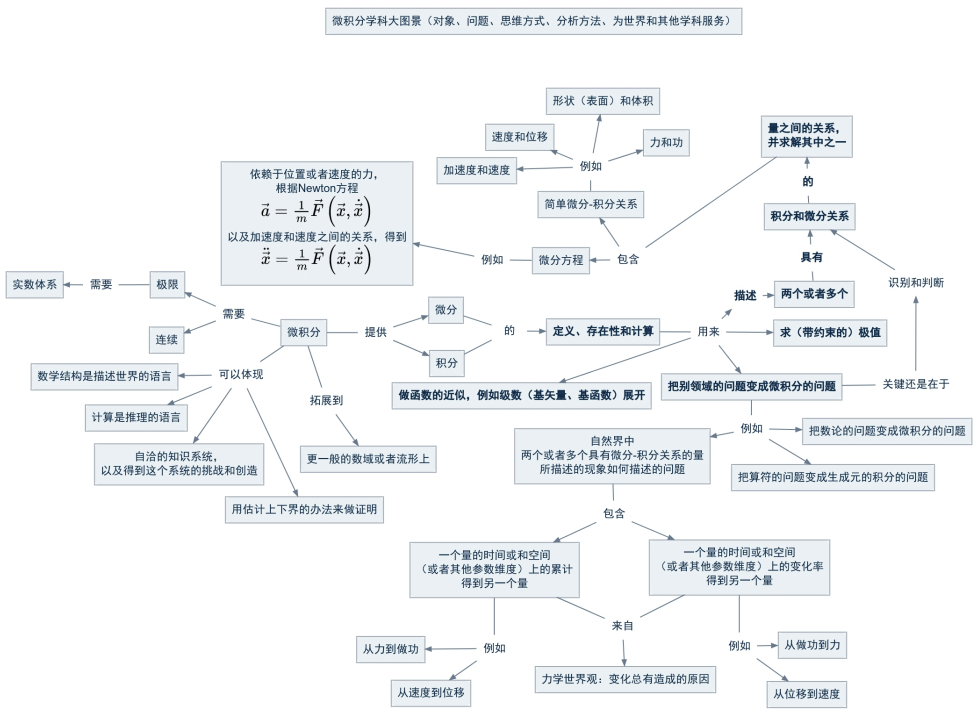

图 1.1: 微积分主要研究什么问题，如何研究，为世界和其他学科解决哪些问题？其自身的理论基础是什么，未来走向哪里？从微积分的学习和使用还可以促进更好地体会数学的哪些方面？

可以再调整一下布局，美观一点

计算当例子：$e^x, x^n, \sin(x), \cos(x)$ 的积分和导数，函数展开为 $x^n, \sin(x), \cos(x)$ 的技术表示，可以展开为 $x^n, \sin(x), \cos(x)$ 的函数的极值、积分和导数。

学会计算不是目的，计算是为了促进学习从而实现从理解到达内化的手段。

1.7 本章小结

在这一章里面，我们非常粗略地介绍了微积分主要研究什么问题，怎么研究，从哪里来到哪里去，现在怎样。我们把这些叫做一个学科的大图景：典型研究对象、典型研究问题、典型思维方式、典型分析方法、和世界以及其他学科的关系。在这里，我们把大图景放到教给你具体知识之前。

我们这样做是非常危险和困难的，因为你还没有真的学习过微积分，不可能对上面这些微积分的学科大图景产生比较好的理性的和直觉的认知。可是，这是非常有必要的。这会使得我们的学习有方向感不迷失，提升学动机，甚至做创造体验式学习，也就是一边提出和面对挑战，一边假装着创造尽管前人已经创造出来过的知识，而达到主动学习的目标，从而将来更容易把学到的知识做创造性使用或者用于创造新知识。有的时候，学习数学容易变成跟着教材一步步地走，不知道走向哪里，直到有一天看到整体从而幡然醒悟之前为什么这样学为什么学这些，或者直到看不到整体，不能醒悟也能忍受而放弃。

这就好像你去一个地区旅游，你不希望你仅仅是做无脑随机行走或者无脑跟着导游走，而是你希望提前能够看到一张地图，或者有人给你介绍一下概貌，接着在爬山的过程中不断地加深对这个整体地图的认知。在学习上，这就是尽量学之前就有一个概貌，学习过程中不断地丰富和深化这个概貌，并且冲着这个概貌去学习，去提出和面对问题创造知识来学习。这样的学习能够做到“教的更少，学的更少，学得更多”，通过学习（或者说假装着创造）最少量的最核心的具体知识领会到这个学科的大图景。这样的学习被称为“人类知识高速公路上以高层知识生成器为目标的理解型学习”[1]。

注意，我们已经知道了将来微积分要能够处理累积量-变化率这对关系，以及由这对关系所描述的两个量，甚至若干对联合在一起的这样的关系所描述的多个量。我们也已经知道这样的关系的例子，例如曲线形状和曲线在某点的切线的斜率，例如速度和位移，例如力和功。我们下一步的任务是构建出来这样的知识体系，尽可能从最少的假设也就是公理和定义出发。警

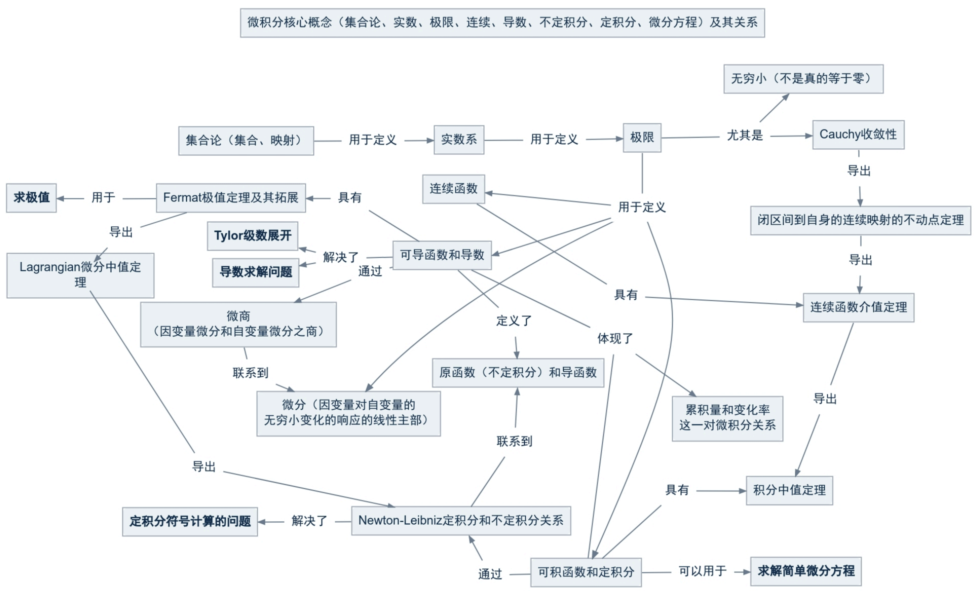

图 1.2: 微积分包含哪些主要公理、定义和定理，它们之间于什么关系，这些定义和定理分别解决了微积分学科大图景中的哪些主要问题?
可以再调整一下布局，美观一点

告，历史上，这是一次对数学的挑战，或者说数学危机——有微分和积分但是没有相应的基础概念来清楚地定义微分和积分。

这是这个微积分知识体系的结构图，或者称为微积分学科概念网络。下面，我们来一起把这个知识体系构建起来。

1.8 推荐阅读材料

本章以及全书的写作参考了 Strogatz 的《Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe》[3]，Gowers的《牛津通识读本：数学》[4], 张筑生的《数学分析新讲》第一册 [5], Morris 的《Mathematical thought from ancient to modern times》[6] 和《Calculus: An Intuitive and Physical Approach》[7]，Spivak 的《Calculus》[8], [9]，Apostol 的《Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra》，陶哲轩的《Analysis I》[10] 和《Analysis II》[11]，以及 Rudin 的《Principles of Mathematical Analysis》[12]。

本书在内容选取和呈现的原则上，参考了 Whitehead 的《Aims of Education》[13] 和吴金闪的《教的更少，学的更多》[1]。

其中以下基本推荐大家现在就可以去阅读一下：Strogatz 的《Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe》[3]，Gowers的《牛津通识读本：数学》[4]，张筑生的《数学分析新讲》第一册 [5]，Whitehead 的《Aims of Education》[13]，以及吴金闪的《教的更少，学的更多》[1]。

1.9 作业

习题 1.1 阅读Gowers的《牛津通识读本：数学》[4]，并做读书报告，回答：说了什么，怎么说的，为什么这样说为什么说这个，我觉得怎么样也就是对我有什么意义。

习题 1.2 阅读 Strogatz 的《Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe》[3]，并做读书报告，回答：说了什么，怎么说的，为什么这样说为什么说这个，我觉得怎么样也就是对我有什么意义。

习题 1.3 阅读吴金闪的《教的更少，学得更多》[1]，学会制作概念地图，并做读书报告。读书报告要求概念地图和文字相结合，回答：说了什么，怎么说的，为什么这样说为什么说这个，我觉得怎么样也就是对我有什么意义。

习题 1.4 建议你在完成作业习题 1.3 之后，把上面的作业习题 1.1 和作业习题 1.2 重新完成一次，按照概念地图和文字结合的方式。对比一下前后两次的作业。

第二章　实数

在这一章里，我们来定义实数。我们会考虑到实数需要什么性质，目前能够清楚定义哪些性质，目前暂时接受将来再搞清楚哪些性质。

有界必有确界。

Couchy 收敛性。

2.1　集合论

补充一点点集合论。集合、映射、子集、交集、并集、开集、闭集、卡氏积、关系、定价关系和等价类。

反证法和集合论。

定理、逆定理、否定理、逆否定理和集合论。

映射。

演绎证明，三段论和集合论。三段论：集合 A 中任意元素都具有性质 P，记做 $\forall\alpha \in A, P(\alpha) = 1$，$a \in A$，则 $P(a) = 1$。假设 $P(a) \neq 1, a \in A$，于是 A 中存在元素 a 使得 $P(a) = 1$ 不成立，和 A 的第一条性质矛盾。

理发师师悖论，说谎者悖论，所有几何的集合，集合论的问题和公理化定义，数学危机。可能觉得问题在于有些集合把自己当成了元素，说那咱们约定不允许这样的集合成为数学对象？弗雷格（Frege）的由所有不包含自己的集合构成的集合，记为 X，成为 Frege 集合。

我们来看是否 $X \in X$。如果 X 不包含在 X 之中，则元素 X 满足 Frege 集合的定义，于是元素 X 应该包含在集合 X 之中。如果 X 包含在 X 之中，则元素 X 不满足 Frege 集合的定义，于是元素 X 不应该包含在集合 X 之中。无论哪个答案，我们都得到了自相矛盾的结果。

那问题在于确定性？也就是，任意一个元素 x 和任意一个集合，我们只有以下两种关系存在，$x \in A$ 和 $x \notin A$？是不是，其实，还应该允许，我们不

能判断 $x \in A$ 还是 $x \in A$ 和 $x \notin A$ 呢?

集合的公理化定义

2.2　从集合论到整数

$\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}, \{\Phi, \{\Phi\}, \{\Phi, \{\Phi\}\}\} \cdots$

数学归纳法，集合论，整数的定义。数学归纳法是演绎。

2.2.1　自然数的构造式定义

2.2.2　自然数的公理化定义

2.3　实数的构造定式义：从整数到实数

实数和数轴的一一对应。

2.4　实数是个过程以及极限的朴素思想

2.5　实数的公理化定义和数学危机

2.6　有界集合有确界

2.7　函数和函数的曲线

2.8　推荐阅读材料

2.9　作业

2.10　本章小结

第三章　极限

为了定义导数，我们需要无穷小，一个很神奇的等于零又不等于零的东西（过程、数）。数学危机及其解决。$1-a_n$，$a_n=\underbrace{0.99\cdot 9}_{n}$。

3.1　极限的思想

π 的估计，总花费、购买数量和价格的关系，延拓到购买数量为零的时候（$\frac{p\Delta q}{\Delta q}$），瞬时速度，无限循环小数，$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}}$，Zeno “Achilles 和乌龟” 佯谬

3.2　序列和序列的极限

自然语言和 $\epsilon-N$ 语言。

3.3　无穷小

3.4　Cauchy 序列和收敛序列

3.5　区间套定理

3.6　函数的极限和连续性

联系函数（映射）、连续函数介值定理

自然语言和 $\epsilon-\delta$ 语言。

3.7 推荐阅读材料

3.8 作业

求一些序列极限，求几个极限的四则运算，判断几个函数是否连续

3.9 本章小结

第四章　导数

有了函数的极限，我们来定义导数，以及做一些简单计算。

4.1　导数的直觉含义

变化率，切线斜率，Zeno 飞矢不动佯谬和瞬时速度

4.2　导数的定义

导数的定义和几个典型初等函数的导数的计算。可导函数的条件。处处连续处处不可导的函数。光滑性的定义。

4.3　高阶导数的定义

对前一阶导函数再求导数。无穷小领域内的 Taylor 级数，$o(\Delta x)$ 和 $O(\Delta x)$ 的定义。

4.4　函数极值点的导数

可导函数、连续函数，在某点取到极值的条件。

4.5　不定积分

原函数（不定积分）和导函数。差一个常数的函数等价类。

4.6 Lagrangian 微分中值定理

无穷小形式和有限大小形式

4.7 不定积分的解析计算系统

介绍几个积分符号计算系统的基本原理

4.8 微分和微商

线性主部，一元函数中微商和导数为什么是同一个东西。为什么仅保留一个函数的线性主部就足以回来得到原函数?

dx 和 Δx 的联系和区别。

4.9 推荐阅读材料

画个概念地图，做几个简单导数的计算，几个简单不定积分的计算

4.10 作业

4.11 本章小结

第五章　定积分

通过极限定义定积分，把定积分的计算变成不定积分的计算，

5.1　积分的思想

Archimedes 算曲线下面积，祖冲之算圆的面积，Newton 算一次、二次曲线面积。天生结合极限和无限细分（微分）的思想。

5.2　定积分的定义

定积分的定义和几个典型初等函数的定积分的计算。

5.3　定积分的数值计算

算出来结果，试着和不定积分原函数对比一下

5.4　Newton-Leibniz 定积分-不定积分关系

定积分化成不定积分来计算，不定积分通过看做导数求逆来计算。

不定积分看做积分上线为变量的定积分。

5.5 积分中值定理

5.6 推荐阅读材料

画个概念地图，做几个简单导数的计算，几个简单定积分的数值和解析计算

5.7 作业

5.8 本章小结

第六章　三角级数

6.1　多项式展开的思想

Tylor 级数，Newton 运用 Tylor 级数计算积分求曲线下面积。

从多项式展开到三角函数展开，以及更一般的基函数展开

6.2　三角函数的积分微分和正交性

6.3　函数的三角函数级数展开

6.4　函数的 Fourier 级数展开

6.5　函数的 Fourier 变换

6.6　推荐阅读材料

画个概念地图，做几个简单导数的计算，几个简单定积分的数值和解析计算

6.7　作业

6.8　本章小结

第七章　简单微分方程

微分-积分关系的直接计算——求导或者求积分，一阶微分方程——只包含原函数和导函数的方程——的求解，高阶常系数齐次微分方程的求解。

7.1　为什么会有微分方程

局域性：变化导致的效果在时间和空间上的邻域内发生。那么，是否有突破局域性的现象呢？例如，这里有个变化，会“直接”（而不是通过不断地空间上的邻域相传）造成一个“遥远的不相邻的”地方的由于那个改变带来的效果呢？或者一个时间点的变化，会“直接”（而不是通过不断地时间上的邻域相传）造成一个“遥远的不相邻的”时间点的由于那个改变带来的效果呢？

前者还真的有，例如量子纠缠态。那还能用微分方程描述吗？对于量子纠缠态，我们发现，只要从整体系统的角度来看，其仍然具有局域性，仍然可以用微分方程来描述。这个看起来的对局域性的破坏，只有把纠缠态的整体系统分开为若干个子系统来看（测量）的时候才会出现。因此，我们只要保证每次我们都在整体系统的层面来对我们的研究对象做观测和计算，就行了。

但是，问题来了，对于实际系统，我们怎么知道我们是否真的做到了把所有的纠缠在一起的子系统都放大到我们的整体系统之中了呢？因此，如何才能保证局域性，实际上还是一个问题。

当然，没准人们有发明出来可以处理非局域的现象的数学。但是，现在，我们只关注处理局域现象的数学，也就是微积分。

7.2　微分方程的定义

方程、初始条件、边条件

7.3　一阶可分离变量的微分方程

7.4　二阶常系数齐次微分方程

7.5　高阶系数齐次微分方程

7.6　微分方程数值求解

Euler 方法，Runge-Kutta 方法。

7.7　推荐阅读材料

画个概念地图，求解几个简单的微分方程的数值和解析解。

7.8　作业

7.9　本章小结

结束语

整本书到此结束。本书在内容选择甚至具体内容的展开上都和大多数书不太一样。希望这个企图做到不一样的努力能够对于学习者的学习和理解有点效果（make a difference）。

内容上贯穿全书的是从什么是微积分——关于微分和积分关系的语言。

谢谢你作为学习者付出的时间和努力，希望你喜欢这个深入思考的过程。

参考文献

[1] 吴金闪. 教的更少, 学得更多——概念地图学习与教学方法 [M/OL]. Unpublished, retrieved March 2016, 2016. http://www.systemsci.org/jinshanw/books/.

[2] 吴金闪. 系统科学导引 [M/OL]. Unpublished, retrieved Jan. 2017, 2017. http://www.systemsci.org/jinshanw/books/.

[3] Strogatz S. Infinite Powers: How Calculus Reveals the Secrets of the Universe [M]. Mariner Books, 2019.

[4] Gowers T. Mathematics: A Very Short Introduction [M]. Oxford: Oxford University Press, 2002.

[5] 张筑生. 数学分析新讲（第一册） [M]. 北京大学出版社, 1990.

[6] Kline M. Mathematical thought from ancient to modern times [M]. Oxford University Press New York, 1972.

[7] Kline M. Calculus: An Intuitive and Physical Approach [M]. Dover Publications, 1998.

[8] Spivak M. Calculus [M]. Publish or Perish, 2008.

[9] Apostol T M. Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra [M]. Publish or Perish, 1991.

[10] Tao T. Analysis I [M]. Hindustan Book Agency, 2016.

[11] Tao T. Analysis II [M]. Hindustan Book Agency, 2016.

[12] Rudin W. Principles of Mathematical Analysis [M]. McGraw-Hill Education, 1976.

[13] Whitehead A N. The Aims of Education and Other Essays（中译本《教育的目的》） [M]. Free Press; Reissue edition, 1967.

人名与常用翻译

G | W

G

Gowers	Timothy Gowers（高尔斯）. 17, 18

W

吴金闪	北京师范大学系统科学学院教师. 18

插图

举例