

---

# 数学建模

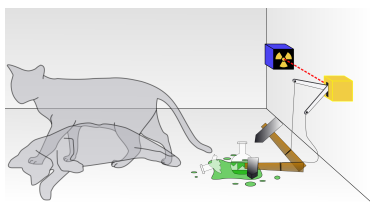
## ——寻找世界的（近似）忠实的可 计算表示

---

吴金闪



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

科学在于给这个世界寻找合适的数学结构  
学习数学建模需要通过欣赏、临摹和实践

Teach Less, Learn More

2017年11月20日



# 目录

<b>第一部分 引论：什么是数学模型和数学建模</b>	<b>11</b>
<b>第一章 经典力学和微积分</b>	<b>15</b>
1.1 作业 . . . . .	15
1.2 本章小结 . . . . .	15
<b>第二章 量子力学和矢量代数</b>	<b>17</b>
2.1 典型经典随机现象和经典随机描述 . . . . .	17
2.2 典型量子现象 . . . . .	17
2.3 量子现象的数学描述 . . . . .	21
<b>第三章 毛皮贸易及其背后的捕食者 - 被捕食者模型</b>	<b>23</b>
<b>第四章 第一部分总结：什么是数学模型和数学建模</b>	<b>25</b>
<b>第二部分 数学建模的典型思维方式</b>	<b>27</b>
<b>第五章 假设的提出修改和精炼</b>	<b>29</b>
<b>第六章 数学基础和学习的问题</b>	<b>31</b>
<b>第七章 系统图示法</b>	<b>33</b>
<b>第八章 第二部分总结：大概如何数学建模</b>	<b>35</b>

<b>第三部分 数学建模赏析和练习</b>	37
第九章 连续状态动力学过程的建模的几个例子	39
第十章 离散状态动力学过程的建模的几个例子	41
第十一章 粗糙的数学问题集以及少量提示	43
第十二章 第三部分总结：再一次问如何数学建模	45
参考文献	49
名词索引	51
人名与常用翻译	53
插图目录	53
举例目录	57

# 献给

我的夫人冯倩，女  
儿吴立心、吴逸兮



# 致谢

在这里感谢老师、学生、家人

本书的电子版可以从网页“吴金闪的书们”找到。如果你是实体书的读者，需要输入网址的话，它是：<http://www.systemsci.org/jinshanw/books>。





# 前言



## **第一部分**

### **引论：什么是数学模型和数学建模**



科学家，尤其是物理学家，其主要目的就是给实际的世界提供一个可计算的可证伪的<sup>1</sup>理想模型，通过对这个理想模型做计算，人们能够得到实际世界的行为。

---

<sup>1</sup>一个理论其所推导出来的结果原则上可以被实验和实践证明是错的，但是迄今为止，还没有被证明是错的就叫做可证伪的但是尚未被证伪的理论。更加深入的讨论见 [1]



# 第一章 经典力学和微积分

在这一章里，我们看看，微积分是在什么样的背景下提出来的，是为了描述和解决什么问题的。当然，微积分的完善是纯数学基础数学的研究问题，但是，它的提出其实是一个数学建模，至少从 Newton 的角度。

## 1.1 作业

**习题 1.1** 阅读Bender的《数学模型引论》[?]

## 1.2 本章小结





## 第二章 量子力学和矢量代数

在这一章里，我们看看量子系统为什么用 Hilbert 空间的矢量和算符来描述。在这个问题上，数学走在了物理学的前面。有的时候，物理学的现象和概念使得数学的概念得到提出和发展。有的时候，数学的概念在物理学里面得以发挥作用。

### 2.1 典型经典随机现象和经典随机描述

### 2.2 典型量子现象

**实验 2.1 (相机镜头上的贴膜形成的光的干涉现象)**：镜头上的贴膜就是让光尽可能多地通过镜头之前的膜而不是被这个膜反射太多 [2]，然后，也降低在膜和镜头——可以是玻璃或者塑胶——之间的反射。现在，我们来关心前半部分——如图 2.1 所示的光过膜的两个界面——的过程。为了简单起见，我们用 Feynman 在《QED: The Strange Theory of Light and Matter》[3] 中的光过玻璃的例子——把光过贴膜改成光过玻璃。概念上两者没有区别。

**实验 2.2 (Dirac 的光过三块偏振片)**：找三块完全相同的偏振片来做如图 2.2 所示的三个实验。先拿其中的两块做实验 *A*：一手拿一块偏振片，把两块偏振片完全平行地放在面前，透过镜片看物体。观察是否能够看到东西，还是基本不能透光？再拿这两块做实验 *B*：一手拿一块偏振片，把两块偏振片垂直地放在面前，透过镜片看物体。观察是否能够看到东西，还是基本不能透光？接着取出第三块镜片，做实验 *C*：把第三块镜片以某个角度——与之前的镜片都不平行——插入到实验 *B* 的两块之间（这时候你可能需要别人帮忙）。观察是否能够看到东西，还是基本不能透光？

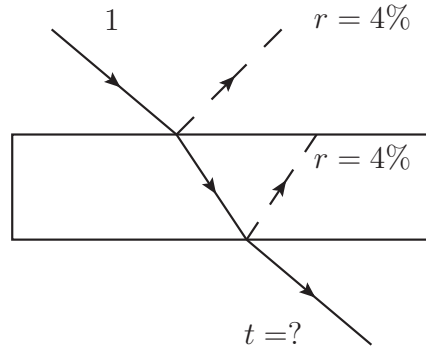


图 2.1: 光子经过一块玻璃, 可以在玻璃的两个界面上发生反射和透射。那么从第一个界面出来的光就可能是第一次反射形成的, 也可能是第一个界面和第二个界面反射并且在第一个界面透射以后形成的。这样互斥事件形成的光能够相互抵消吗? 如果不能, 我们给相机镜头镀膜——这里把膜看作新的一层玻璃——干什么?

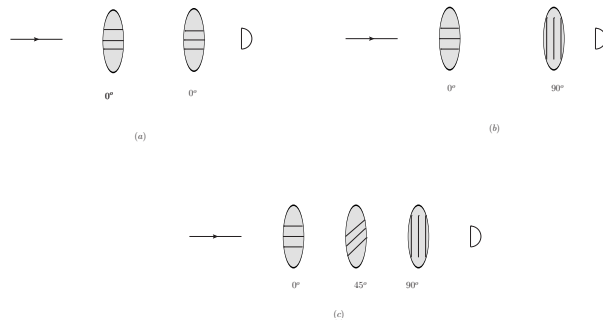


图 2.2: (a) . 光过两块平行偏振片 (透过)。 (b) . 光过两块垂直偏振片 (挡住)。 (c) . 光过三块偏振片——最前最后两块相互垂直, 中间的偏振片处于前后两者之间的某一角度 (透过)。



图 2.3: 这个偏振片专门是开发了做教具的，非常便宜。

实验结果是：*A* 通过两个平行镜片看物体，基本上没变（光的强度有变化，但是能够清楚地看到镜片之后的物体）；*B* 通过两个垂直镜片看物体，基本上看不到镜片之后的物体；*C* 增加一个镜片以后，之前不能看到的镜片之后的物体又能够看到了。

这个（将来我们会看到的）量子效应如此显著的实验，竟然是可以在家里做的，只要购买三个偏振片，例如偏振墨镜或者如图 2.3 的教具。

**实验 2.3 (光子 which-way 实验)：**如图 2.4 所示，一个光子经过第一面内部方向为  $45^\circ$ （见图中所示的坐标系）偏振分束器之后，只允许透射光过去，反射光被完全挡住。然后这个光子继续经过一个  $0^\circ$  的偏振分束器。经过这个分束器的光子可能走两条路径。不管走哪一条，它都会被反射会到同一个位置（右下角），然后被引入到第三个内部方向为  $45^\circ$  偏振分束器。问：分束器之后的探测器  $D_T$  和  $D_R$  上都会有接收到光子的可能吗？

这个实验的结果<sup>1</sup>是只有  $D_T$  上有光子到达。

<sup>1</sup>实际的实验在最后一步探测的不是“哪一个方向上有粒子”，而是探测是否两个路径上过来的粒子“是否会出现干涉条纹”[4]。如果有干涉条纹则表示路径信息消失了，就不能问“粒子到底从哪一条路上过来了”了。

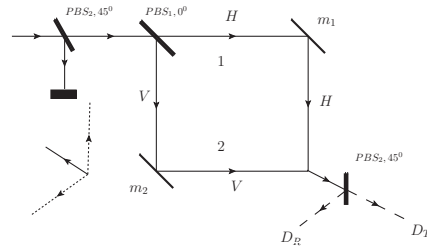


图 2.4: 光子 which-way 实验装置示意图。其中最后一步把两个不同路径来的光又合起来然后进入偏振分束器在实验中需要一个额外的仪器来完成。在这个示意图里面我们只需了解能够做到这样的合起来就可以了。注意偏振分束器的内部方向和图中的仪器的摆放方向不是一个东西。

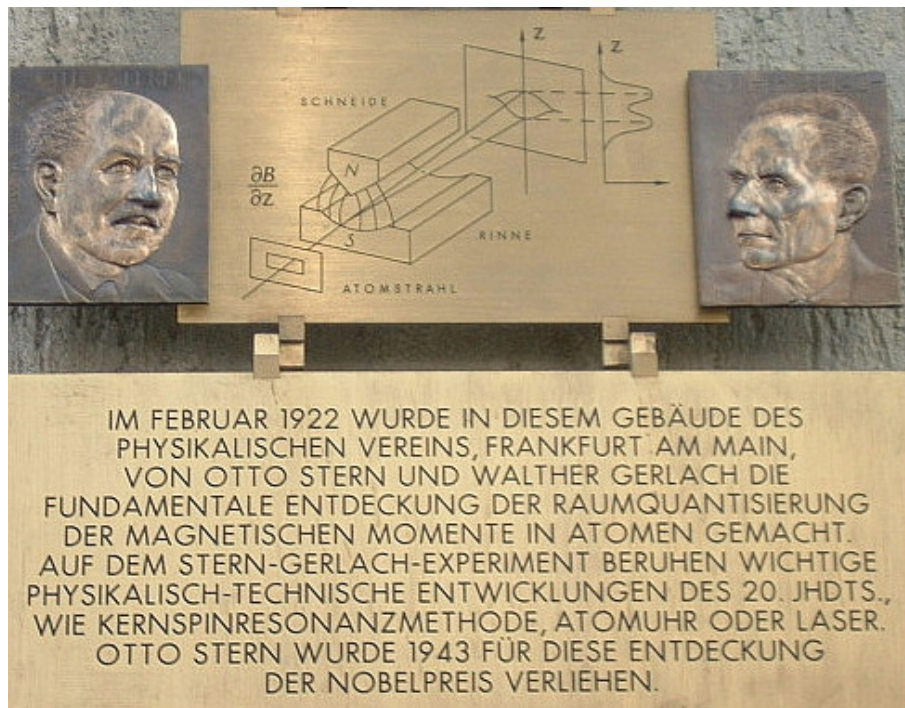


图 2.5: 来自于Stern和Gerlach的自旋Stern-Gerlach 装置示意图。图片来自于 Wikipedia 页面[https://en.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach\\_experiment](https://en.wikipedia.org/wiki/Stern-Gerlach_experiment)。

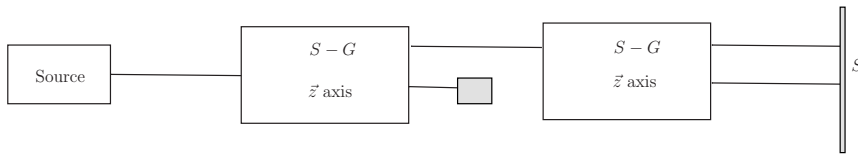


图 2.6: 自旋经过一个 Stern-Gerlach 装置——其内部就是一个磁场——之后挡住向下的输出，这样从装置出来的状态就是第一个装置的向上方向。接着让这个输出的自旋再一次经过同样方向的装置——得到仅有一个向上的输出结果。

## 2.3 量子现象的数学描述

为什么要有矢量加法，为什么要有非对易算符



### 第三章 毛皮贸易及其背后的捕食者 - 被捕食者模型





## 第四章 第一部分总结：什么是数学模型和数学建模



## 第二部分

### 数学建模的典型思维方式



## 第五章 假设的提出修改和精炼

抓住主要矛盾，简化，冲着某个目标，不断地挑战和修订假设，不断地思考计算的意义和条件



## 第六章 数学基础和学习的問題

画画，先学会技巧，还是先学会表达，能一起学吗？写作，先有思想，还是现有先做技巧，能一起有吗？

学习数学，需要回到概念和计算提出来的场景下。

数学就是需要的时候，我去创造它。如果已经被创造，那就算别人的，我就用好它。





## 第七章 系统图示法

一切在于联系，内部、外界

量纲分析：确定有哪些因素的意义

系统科学



## 第八章 第二部分总结：大概如何 数学建模



## 第三部分

### 数学建模赏析和练习



# 第九章 连续状态动力学过程的建模的几个例子

动力学方程的思想——状态、状态演化和技术——微分方程模型





# 第十章 离散状态动力学过程的建模的几个例子

Markov 过程



# 第十一章 粗糙的数学问题集以及 少量提示

关键在于尝试、练习和指导



## 第十二章 第三部分总结：再一次 问如何数学建模



## 结束语

整本书到此结束。本书在内容选择甚至具体内容的展开上都和大多数书不太一样。希望这个企图做到不一样的努力能够对于学习者的学习和理解有点效果 (make a difference)。

内容上贯穿全书的是从什么是数学模型什么是数学建模——为现实世界找到忠实或者近似忠实的数学表示。

谢谢你作为学习者付出的时间和努力，希望你喜欢这个深入思考的过程。





## 参考文献

- [1] Popper K. The logic of scientific discovery [M]. London/New York: Routledge, 2005.
- [2] Moghal J, Kobler J, Sauer J, et al. High-Performance, Single-Layer Antireflective Optical Coatings Comprising Mesoporous Silica Nanoparticles [J]. ACS Applied Materials & Interfaces, 2012, 4 (2): 854–859.
- [3] Feynman R P. QED: The Strange Theory of Light and Matter [M]. Princeton University Press, 1988.
- [4] Lukishova S G, Carlos R Stroud J, Bissell L, et al. Teaching Experiments on Photon Quantum Mechanics [C/OL]. In Frontiers in Optics 2008/Laser Science XXIV/Plasmonics and Metamaterials/Optical Fabrication and Testing, 2008: SThD3. <http://www.osapublishing.org/abstract.cfm?URI=FiO-2008-SThD3>.



# 名词索引

S

S

三道门实验

Three-Gate experiment.

Dirac 的光过三块偏振片 Light pass through three  
polarized beam splitter. 17

Stern-Gerlach 装置

Stern-Gerlach apparatuses. 20



# 人名与常用翻译

B | G | S

B

Bender Edward A. Bender (本德) . 15

G

Gerlach Walter Gerlach (盖拉赫) . 20

S

Stern Otto Stern (斯特恩) . 20



# 插图

2.1	Feynman 的光过玻璃示意图 . . . . .	18
2.2	Dirac 的光三块偏振片 . . . . .	18
2.3	便宜的偏振片 . . . . .	19
2.4	光子 which-way 实验装置示意图 . . . . .	20
2.5	自旋的 Stern-Gerlach 装置 . . . . .	20
2.6	自旋过 Stern-Gerlach 装置示意图 . . . . .	21





## 举例