High School Physics Done Right

中学物理这样学

吴金闪

为了理解物理而写：知识简单，思考深刻，体现物理
实验启发和实验检验
概念抽象，数学建模，计算推理，启发数学
为了学会科学（精神、研究方法）而学物理
有系统，有联系，知识网络
教的更少，学得更多

List of changes

批注清单

目录

献给

吴立心、吴逸兮，以及所有的中学生们。愿你们永远可以体验到认识世界的快乐，思考的快乐，讲道理的快乐，把知识搞通透的快乐，运用知识解决问题的快乐，而不是被教“就是这样，你记住”，“你只需要会做题”。

致谢

序

前言

Students should be made to think, to doubt, to communicate, to question, to learn from their mistakes, and most importantly to have fun in their learning.

学生们需要被塑造成去思考，去怀疑，去交流，去提问，去从他们所犯的错误中学习，而且最重要的是从他们的学习中获得快乐。

– Richard Feynman（费曼）

Be a free thinker and don't accept everything you hear as truth. Be critical and evaluate what you believe in.

做一个自由思考者，不要因为你听说他们是真理就接受他们，要有批判性，对于你选择来相信的东西先做好评估。

– Aristotle （亚里士多德）

本书是"人类知识高速公路上以高层知识生成器为目标的理解型学习"（简称"理解型学习"[1]）应用于具体学科——物理——的学习的一个例子。在这里我们把中学，包含初级中学和高级中学，的物理知识做了梳理，用新的方式做了反映物理学科大图景的呈现。这是本书的第一个目的。同时，由于物理是科学最典型的代表，科学精神和科学方法的主要发源地，因此，在这里，我们也会尽力从物理的学科大图景，走到科学的学科大图景。

那么，什么是科学的学科大图景呢？在更具体地展开论述什么是学科大图景，其包含哪些方面，在科学这个包含物理、化学、生物、地球科学、医学、经济学、语言学、教和学的科学、脑和认知科学等科学学科分支的整合对象上，各个方面具体是什么意思之前，我们先粗略地来回答一下科

学是什么。这大概是本书最最想传达给读者们的信息。科学不过就是通过所谓的科学研究方法来得到的对于现实世界对象的知识的系统（有内部联系的集合）以及获得这些知识的方法——也就是科学研究方法——的系统；而科学研究方法固然一方面来自于对或者科学知识的过程的总结因此是继续发展中的，但是大概来说主要指的是：观察和实验的启发（包含对观察到的现象和实验结果的分析计算和总结梳理，也就是归纳）、概念和数学建模推理计算、计算结果的实验检验、对所获取的知识和提炼出来的研究方法的系统化梳理。其中，数学推理计算和计算结果的实验检验称为批判性思维，概念和数学建模被称为抽象，有了数学模型之后的计算推理其实是逻辑演绎，第一阶段可以称为带有批判性的归纳，第四阶段可以称为系统化（系统化大概的意思就是，知识，也就是概念和命题，不是一条条独立的，而是尽可能地建立在最少的假设的条件下，通过知识之间的联系来构成的一个体系）。也就是说，科学研究方法不过就是这几个关键词：批判性思维[1]、抽象、归纳、演绎、系统化，以及科学不过就是科学知识和科学研究方法的整体，而科学研究方法一方面帮助获得科学知识，一方面来自于对获得科学知识的过程的抽象总结和系统化。

或者，你要是还是觉得这句话太复杂，那我们可以试试继续凝练成一句话。我们希望传达的唯一的一句话是：**物理学或者科学就是通过实验启发、概念和数学建模计算、实验检验来得到的具有系统性的知识，以及得到这些知识的过程中总结出来的前面的方法——实验启发、概念和数学建模计算、实验检验**[2]。

我们这本书的所有的具体知识和这些知识创造过程创造案例，不过就

[1]顺便，稍微多数一点点关于批判性思维和演绎的关系。在这里，我们把实验检验也当做实现批判性思维的手段，和数学计算推理也就是演绎并列。因此，演绎和实验检验是两种来实现检验命题的渠道，一种从逻辑上来检验，一种从现实来检验。也就是说，批判性思维的意思是，只有要么经受了逻辑演绎的，要么经受了实验检验的命题，才能成为人类知识的一部分。具体要求哪个部分，不同学科不一样：对于数学，只要求经受了逻辑演绎，对于科学要求既能经得起逻辑演绎还能通过实验检验。更进一步，就算我们忽略把实验看做实现批判性思维的渠道这一点，演绎或者说逻辑思维和批判性思维也不是一回事。逻辑思维是方式，是渠道；批判性思维是用法，是功能。这两者被很多人很多书混在一起。这要注意。

[2]随着新的研究问题的提出，未来（以不太大的）可能还会有新的，尽管这个层次的方法上的发展远远比知识的发现或者说创造慢很多很多。

是为了帮你更好地理解这句话。只要你体会好了这句话，就算你忘了所有的具体知识和研究过程、研究案例，你仍然属于把物理把科学学好了的人。而且，你要在一定程度上追求，在用具体知识和研究过程、研究案例来理解到这句话以后，忘了具体知识和研究过程、研究案例，甚至，把这句话本身也忘了，仅仅留下了，**当你来提出问题解决问题的时候怎么办——去通过实验启发、概念和数学建模计算、实验检验来创造的具有系统性的知识，而不是去背诵这句话**。

其实，这个“到底哪些人类创造出来或者认识到的知识算真正的知识，以至于后人可以当做思考的基础，可以在此基础上继续创造新的知识，有没有一个判断标准”的问题，曾经痛苦过历史上大量的哲学家、数学家和科学家。例如，是不是来自于圣经或者某一本很有权威的书的就可以算这样的知识呢？是不是教皇、国王或者某一很有地位的个人说的就可以算这样的知识呢？或者很年长的人说的，很善于画画的人说的，或者很善于辩论的人，或者很善于言辞的人，或者很能忽悠人的人说的？其中一个用自己的生命来启发世人，来实践讲逻辑和具有批判性很重要的人是留下名言“未经检验的生活不值得过（The unexamined life is not worth living）”的Socrates（苏格拉底）。其中一个被痛苦的非常深，同时还找到了答案的是明确提出“批判性思维”的概念、理念和操作指导的René Descartes（勒内 · 笛卡尔），见其著作 [2]。此外，被这个问题痛苦，并且也提供了一部分答案的还有第一次把实验（以及理想实验，就是现实中不一定能做，但是逻辑上可以做的实验）引入物理学的Galileo Galilei（伽利略 · 伽利莱），和第一次提出来科学知识要从经验，尤其是观测和实验（其实还有当时已经有后来也很重要的数据分析，不过Francis Bacon（弗兰西斯 · 培根）自己不提这一条）之后形成的对现象的认识，总结提炼也就是归纳出来的Bacon，以及彻底导致数学建模（甚至发展了数学本身来建这个模）和计算成为科学家的语言的Isaac Newton（伊萨克 · 牛顿），还有第一次运用公理化体系和数学论证来构建具有系统性的知识而不是一条条单独记忆和使用的Euclid（欧几里得）。顺便，非常遗憾的是，这些先知先觉者中的多位，由于需要自己探索在前，引领社会和科学在后，往往不仅智力上被挑战，人生也被挑战，甚至为此付出很高的代价。有兴趣的可以看看Socrates、Descartes、Galileo的故事或者传记。

现在，我们来回答具体物理学学科或者科学的学科大图景都指的是什么。在那之前，我们来解释一下学科大图景这个词本身又是什么意思，为什么学习者要学会学科大图景。在一个学科的学科大图景指的这个学科的典型研究对象、典型研究问题、典型思维方式、典型分析方法，以及这个学科和世界以及其他学科的关系，或者说典型学科责任。在这个新的呈现里面，我们强调了学习是为了创造知识、创造性地使用知识，以及欣赏知识的创造和创造性使用，并且企图通过理解型学习来通过具体知识的学习之中体会好物理甚至科学的学科大图景，从而达成上面的学习的目的。

我们来补充一点点关于理解型学习的知识。在这个学习方法之中，最重要概念是知识的四个层次：第一层，事实性程序性知识；第二层，学科概念知识；第三层，学科大图景知识；第四层，一般性人类思维和教和学的知识。时间可以通过秒表来测量其单位是秒，位移可以通过米尺来测量其单位是米属于第一层知识。速度是单位时间内的位移，速度是矢量，速度和动能之间的关系属于第二层知识。物理学受对现实世界的对象的状态的测量的启发通过给现实世界的对象及其状态的描述建立概念和数学模型来描述世界，通过对于概念模型和相应的数学模型的计算推理来得到理论上的答案，并且通过实验来检验这些计算推理的结果，这些属于第三层知识。通过不同层次知识之间的联系来学习，例如从第一层第二层知识的创造过程中提炼出来第三层知识，以及反过来，把第三层知识用于第一层第二层知识的创造过程，成为知识之间的上下贯通，属于第四层知识。具体这个上下贯通总结出来的思维方式，例如科学精神中最重要的批判性思维——没有经过我自己的理性检验的东西不能成为我进一步思考的基础，也属于第四层知识。第四层知识超越了物理学等具体学科。

更进一步，我们把这样的通过不同层知识之间的关系来学习和思考，也就是从对相对低层知识的总结提炼中学习、体会甚至创造相对高层知识，从相对高层知识来指导相对低层知识的学习、理解和创造，称为上下贯通；我们把通过同一层知识之间的联系来理解好这一层知识，以及把来自于一个领域的高层知识用于学习着解决或者创造着解决另一个领域的问题称为左右贯通。我们可以借助概念地图（概念和概念通过连词相连，例如“速度–是–位置矢量对时间的微分”、“加速度–是–速度矢量对时间的微分”）来呈现和运用上下左右贯通。各个学科的概念地图的总和被称为人类知识高速

公路。正是由于第三层和第四层知识具有帮助解决本领域或者其他领域问题，创造知识的能力，我们把它们称为高层知识生成器。

因此，知识的层次中的第三层和第四层知识，也就是高层知识生成器；人类知识高速公路，也就是各个学科的概念地图的总和；上下左右贯通，也就是从低层知识中总结体会到高层知识，从高层知识来看低层知识，运用高层知识来学习着或者创造着解决本领域或者其他领域的问题从而学习或者创造知识，是理解型学习最重要的核心概念和理念。更多信息可参见吴金闪的《教的更少，学得更多》[1]。

因此，本书的第二个目的就是用理解型学习来帮助学习者学好中学物理，从而也学会理解型学习，进而给用理解型学习来学习其他学科以及创造和创造性使用各个学科的知识做好准备。

那为什么我们要这样定位本书呢？因为我们想培养你成为提出和解决问题的人，创造知识或者创造性地使用知识的人，或者是至少可以欣赏知识的创造和创造性使用得人，而不是书袋子和重复性地使用知识的人。

本书的第三个目的是，除了呈现好物理学学科大图景，从而帮助学习者学好物理体会到物理学的学科大图景，掌握理解型学习和养成用理解型学习来学习各个学科的知识的习惯之外，帮助到那些能够帮助到学生达成这样的目标的人，也就是家长、教师、教材编撰者和教育管理者，来更好地帮助学生达成这个目标。其实，一本书和一位老师的影响力毕竟有限，当然随着网络技术的发展这个影响力已经具有了被大大地放大的可能，因此，本书其实的第三个目标反而是本书其实最最真实而重要的意图。

在这样的一个定位和写作意图的过程中，我们设想的直接的读者是家长、教师、教材编撰者和教育管理者。希望这些读者能够从本书所选择的教什么、怎么教之中体会到理解型学习，进而来开展理解型学习指导下的课程教学、课程设计和考察方式。但是，为了达到这个目的，我们希望能够通过“做中学、创造中学”来帮助家长、教师、教材编撰者和教育管理者，也就是从看如何把理解型学习的理念和工具用于实际课程的设计来领会理解型学习，从看理解型学习的理念如何用于帮助学习者学习具体知识来领会理解型学习，而不是理解型学习的理念和概念的直接传达。因此，我们打算通过在理解型学习的指导下来具体编撰这样一本中学物理教材，当例子，来帮助这些读者得到更大的收获，而不是被说教。

因此，本书的前言分成了“写给中学生们和家长们的”和“写给教师、教材编撰者和教育管理者的”两个部分。请读者们各取所需。

写给学生们和家长们的

同学们，世界是丰富多彩的，一旦你搞懂了这个世界的丰富多彩，你会觉得这个世界更有意思。而物理学，就是一个帮助你搞懂这个世界的丰富多彩的学科。你搞懂了色彩的原理和彩虹如何形成之后，不会妨碍你欣赏花和彩虹的美；就算你对世界的认知很有自信于是非常清楚魔术就是假的，也不会妨碍你欣赏不可思议的魔术；你搞懂了闪电背后的原理和干燥的晚上你脱毛衣的时候的闪光基本一样，不仅不会阻碍你的好奇心觉得懂得太多了，而是会反过来进一步去追问还有哪些其他的现象其实属于同样的原理，甚至更进一步还有哪些东西看起来相差很大其实原理相同。因此，物理学不会损害你对世界的感知，反而会增加你对世界的好奇心，让你的生活有意义——能够用你的大脑（思考、计算）和手（做实验）来认知世界是一件了不起的事情，甚至有的时候还会有实际的用途。例如，电路的知识是你用的电脑和手机的芯片背后的原理，相对论是你用的 GPS 定位算法的基础，桥梁建造都需要完成受力分析，发射火箭需要运用 Newton 运动定律来计算轨道等等等等。

更更重要的是，从学习物理之中，你不仅仅可以学会知识，提升好奇心，养成探索世界提出问题的习惯，你还能学会回答问题创造知识认识世界的方法。而且，这个方法从道理上说还很简单[3]，不过就是观测和实验的启发，概念和数学建模计算、对计算结果的实验检验。

有了这个方法，养成了使用这个方法的习惯，保持甚至提升了好奇心，不仅仅有助于在物理学方面——也就是关注这个世界的自然的部分——提出和解决问题，甚至可以迁移到其他学科关注的这个世界的其他侧面，例如，关于人类社会的现象以及人类个体的行为和思考的问题。

任何的研究，一方面是满足纯粹的好奇心，另一方面我们至少还希望在从所研究具体对象（例如，自由落体现象中的某一块石头）拓展到相应的

[3]具体实现上，测量可能需要专门的仪器，建模可能需要研究者很强的抽象能力和创造性，计算可能非常具有挑战性

这一类对象（例如，绝大多数形状不太特殊[4]的石头，甚至铁球，甚至所有的物体）之后仍然成立。而只要我们要求这个可迁移性，我们就必须去做实验检验，去对这一类对象和这一种现象做归纳和抽象得到概念和数学模型。具体的对象是不可迁移的，只有抽象为概念之后，其他的对象才可能也满足这个概念的定义于是成为符合这个概念的外延对象，才可以尝试去迁移，去检验迁移。从具体对象，到这些对象的类，到这个类的内涵，这就是概念抽象概念建模，用抽象出来的概念代替具体对象来描述世界。这个抽象的程度是不是合适，概念有没有定义的太宽，以至于有一部分包含进来的对象的实际行为其实和理论的不相符，或者定义的太窄其实有很多没有包含进来的对象也具有相同的行为，这个就只能交给实验来检验了。因此，归纳和实验启发、抽象实现概念建模和数学建模进而做数学计算、实验检验其实是人们认识这个世界的基本的要求。这个叫做科学研究方法的东西一点也不神秘。而所有的物理学的知识，甚至整个科学的知识，不过就是这样的一个非常基本非常自然的研究方法用在各个学科的具体研究对象上得到的研究结果（的系统化梳理）而已[5]。

将来你们学到的物理学各个分支领域对象上的特有规律以及这些规律的获得过程，不过就是帮你们更好地体会好这个科学研究方法，以及这个方法如何针对具体对象开展研究。

当然，你可能会说，就算我体会好了这个方法，甚至我学会的物理知识都是用这个方法自己得到的，我也不一定就能够取得好的物理成绩啊！是的，由于我们的物理考试题大多数情况下是知识型的考试题，而是不是让你来展示如何研究一个对象，你学会的方法和具体知识确实不一定就能够帮助你直接提高考试成绩。但是，你想，一旦你绝大部分物理知识都是这样来自己得到的，你对这些物理知识的理解肯定会很深刻，于是，只需要做少量的运用这些知识的练习题，你就可以达到其他人需要大量的联系才能达到的理解和掌握的层次。你也不需要做太多的练习题来发现你理解当中的

[4]将来，搞清楚了原理之后，会明白这个“形状不太特殊”的目的是保证物体受到的空气阻力不是很大。或者，更进一步，如果空气阻力可以测量或者计算，则其实，就算有空气阻力也无所谓，这些对象的落体运动过程会不同，但是其背后的原理，Newtun 第二定律 $F = ma$ 仍然成立

[5]注意，每个学科仍然有自己学科下的思维方式和分析方法。因此，这个最高层面的研究方法各个学科相同并不意味着各个学科都相同，都不再有自己的思维方式和分析方法。

问题，如果有问题的话。你只需要去把知识之间的逻辑理顺，尝试着自己从实验（有的时候并不一定需要自己做，当然，最好每一类实验自己都做过其中的几个）走到概念，走到命题，走到概念间关系，直到走通实验检验这条路。

那你说了，既然海量刷题也可以达到理解知识的目的，并且提高成绩上可能更直接，而围绕物理学学科大图景的理解型学习尽管可以提高对概念的理解，但是也需要一定量的练习来提高成绩，那为什么不用海量刷题的方法来学习得了呢？是的，如果你仅仅关注近期的成绩，其实，刷题挺管用。但是，你觉得，不断地刷题之后，你还能保持对这个学科的热爱，对这个学科所研究的对象和现象的好奇心吗？你能学会像这个学科的专家一样来提出和解决问题，至少假装着创造出来你所需要学习的知识，并且将来你自己来提出和解决问题创造知识吗？不能！因此，为了保持好奇心和热爱，为了将来还能成为一个创造知识的人，你要避免海量刷题！并且，有一个明明可以避免海量刷题的事半功倍的方法，还能够帮助你将来成为一个创造知识的人，你为什么还一定要走事倍功半的海量刷题的路呢？

来吧，丰富多彩的世界等你去探索，等着你去使得她更美丽。而探索和更美丽需要物理学的知识，需要物理学的研究方法，需要你的创造性。

上面是写给学生们的前言。下面是写给家长、教师、教材编撰者和教育管理者的前言。

写给家长、教师、教材编撰者和教育管理者的

那么，家长们，你希望你的孩子成为什么样的人？磨灭了好奇心和对生活的热爱，就算学到了很多知识，会怎样？做一个找到了属于自己的幸福感的人，才是真的幸福。海量刷题往往走向前者，理解型学习才会走向后者。在海量刷题下，仍然没有被磨灭了好奇心和对生活的热爱的孩子，都是他自己特殊，或者受到了特殊的保护。家长们，现在到了你来给孩子们提供这样的保护了，保护他们免于被磨灭了好奇心和对生活的热爱，保留他们找到自己的幸福的机会。如果你希望你的孩子保留了好奇心和对生活的热爱的孩子，将来能够提出和解决问题，创造知识和创造性地使用知识，或者至少可以欣赏知识的创造和创造性使用，则你就需要大概了解一下理解型学

习，对理解型学习和前面提到的培养孩子的那样的目标之间的联系有一定的认知。你可以基本不懂物理学的学科概念知识，甚至也不太理解物理学的学科大图景，但是稍微地尽可能地了解一下物理学的学科大图景以及极少数体现物理学学科大图景的研究案例，是很有帮助的。

尤其考虑到下面我即将讨论的教师、教材编撰者和教育管理者在教育中起到的作用，家长更加要做到保护孩子们的好奇心和对生活的热爱的作用，鼓励正确的学习方法的作用。这很难，但是，你的孩子你不保护，谁来保护呢?

教师、教材编撰者和教育管理者，请允许我使用重锤。

让我从目前还做得稍微好一点的看得下去的地方开始。目前的人教版的初中和高中物理教材，其实从理念上已经很明显地体现了科学研究方法以及物理学的学科大图景。例如，实验研究确实在人教版的初中和高中物理教材中的地位很高。

但是，初中教材缺乏体现数学计算推导来辅助物理学家思考的地方，初中和高中都缺乏概念建模和数学建模的过程，而还是基本采取了以知识为目标的阐述方式。例如，在阐述电荷有两种可以用电量单位来度量这部分内容的时候，人教版的初中和高中物理教材直接介绍了电荷有两种称为正负电荷的知识，甚至用后来才能学会的原子核和和外电子的知识来“解释”了一下摩擦起电。高中部分甚至有意识地介绍了单位电荷量 e 的发现。可惜这些都是当做直接就有的知识来呈现的。比如说，人们是如何发现电荷有两种的，而不是一种，三种，四种的呢? 其实这是一个非常启发物理学是什么，物理研究怎么做的主题。可惜，要么编者没有这个意识，要么没有这个水平，要么不掌握这部分历史知识也自己不能“创造”出来，要么出于各种担心，人教版的初中和高中物理教材都没有呈现这个人们发现电荷有且只有两种的实验过程和逻辑过程。比如，单位电荷的发现，同样是一个非常体现物理学是什么，物理研究怎么做，甚至数据如何处理的细节，以及探索过程中的弯路，甚至都能体现保留原始实验记录的重要性。可惜，教材仍然没有选择来体现这些。

跳过了只是发现的过程——顺便，真的要呈现也不一定需要完全呈现当时的发现相应知识的过程，可以是改造过的，更简单的，但是所体现的物理学学科大图景类似的过程——就是跳过了帮助学生体会到学科大图景

的机会。学会物理学的知识仅仅是物理教学的目标之一，而且是次要目标，学会物理学是什么以及如何做物理研究，或者至少可以欣赏物理学的研究，才是物理教和学的首要目标。

所以，尽管人教版的初中和高中物理教材的理念已经相当不错[6]，已经在面向知识的基础上，考虑到了实验研究在物理学研究方法上的重要意义，但是，其在概念建模和数学建模、知识的系统性，以及更细节的物理学典型思维方式和典型分析方法，例如分解和综合，例如对简单性的追求，这些对物理学的研究具有非常重要的意义的方面，很少有呈现和指引。

因此，我希望本书能够帮助教材编撰者注意到这些地方，并且本书的编写方式——下一节中被称为“实现‘人类知识高速公路上以高层知识生成器为目标的理解型学习’的步骤”——也可以供教材编撰者参考。

说完还不错的，来说说问题严重的，也就是物理教师。人教版的初中和高中物理教材的境界其实不低，尽管按照我的标准也不高，但是可能比大多数物理教师要高一点。同时呢，人教版的初中和高中物理教材还有一个不太强调知识体系以及具体知识部分偏简单的特点。这个境界不低，具体内容偏简单，一定程度上缺乏系统性的特点，就对教师的教提出和很高的要求。这实际上要求教师在教的过程中做一个再创造再创作。教材不过就是参考资料，知识和思路上都可以参考，但是，一定要对内容偏简单一定程度上缺乏系统性的特点作补充，一定要跟上教材的境界，甚至能够从培养学生像物理学专家一样思考，提出和解决问题，创造知识和创造性地使用知识，或者至少欣赏知识的创造和创造性的使用的角度来补充教材。

但是，实际上，能够做到这样，甚至尝试去这样做的教师有多少呢？很少很少。我亲眼见过把初中的物理知识的学习变成背诵一条条知识，甚至一步步实验流程的老师的教，我也见过通过背诵高中物理教材来企图学会物理的学生的学。教师境界不够，教材具体知识简单，那正好靠背诵和刷题只有靠背诵和刷题，最后拼熟练程度和准确率了。我甚至见过到了丧心病狂的程度的背诵教学的，一个实验步骤和一个理解型问题的答案，用什么词汇经验也是定好了的：必须用教材里面出现的原话！这是扯淡的物理，这根本就不是物理，违反了物理的神——教科书代替了批判性思维成了物理的神，这根本就是宗教教学，而不是物理教学。

[6]尤其是和大多数的中小学甚至大学数学教材相比，那才是完全是面向知识的。

于是，按照这个对教师的教的描述，其实，我也可以预期愿意和能够采用本书作为主要教学参考书来再创造和再创作的老师有多少了。不过，反正，书就在这里，供有心的老师使用，供有心的学生使用。

当然，我也见过再创造再创作的物理教师。希望本书可以至少给愿意这样去做的教师做一个示范，可以怎么去创造去创作，向着什么样的角度去创造去创作。

对于教育管理者，你不一定要懂物理的具体知识，但是大概物理是什么也就是物理学的学科大图景可以稍微了解一下，然后，理解型学习的理念可以稍微了解一下，最后，要把帮助学生、老师和教材编撰者更好地实现像物理学——或者说任何一个其他的值得学习的学科——研究者那样来思考，来提出和解决问题，来创造知识和创造性地使用知识的目标当做自己的工作的核心目标，给他们时间、经费、探索的自由和支持。甚至可以尽可能地把事实性程序性知识为主的考试变成概念理解型为主，顺带考察学习者的思维方式和分析方法的考试。这功德无量。

顺便，我也给我们自己的队伍说个广告：在我们研究中心[7]，我们就在发现和培养这样的教师，编撰这样的教材，梳理各个学科的大图景和概念网络从而帮助教师的教学生的学和教材编撰者的编撰，以及更进一步去探索和检验这样做的方法，甚至研究这样能够做得更好的机理，乃至将来以此为基础建设一个“人类知识高速公路上以高层知识生成器为目标的学习系统”[1]。

本书所体现的物理学科大图景

现在，我们终于可以来回答什么是物理学的学科大图景了。不过，下面这部分内容对于初学者和大多数家长、教师，甚至教材编撰者，教育管理者，教育研究者，都不可能和容易就能够看懂。大概高水平的物理学科教育研究者，有一定水平的物理研究者，非常高水平的物理专业的高年级学生，具有直接看懂这部分内容的可能性。不过，不要气馁，如果看不懂体会不到，你就多看几遍，尤其是学习了一定的具体知识之后而且是像本书一样采用理解型的学习方式学了一定的具体知识之后，再回来看。相信我，一旦

[7]http://iess.bnu.edu.cn，2022 年 10 月 9 日访问。

你能够从具体知识中看到这些知识是如何组织起来的，整体所体现的物理学科是个什么东西，那激动人心的感觉和看穿了的成就感，是无与伦比的，更加不用说，你以后在学习物理学甚至任何讲道理的学科的效率上的提高和成为学科研究者创造知识的可能性的提高。

前面我们提到了本书的核心思想通过“人类知识高速公路上以高层知识生成器为目标的理解型学习”来实现“教和学的更少，学得更多”。对于物理学的学习，这里的高层知识生成器指的是第三层知识物理学学科大图景和第四层超越学科的一般性人类思维，以及教和学的方法。为了实现这个“人类知识高速公路上以高层知识生成器为目标的理解型学习”，我们大概需要完成以下步骤 [1]：

1. 梳理这个学科的学科大图景；
2. 选择体现这个学科大图景的核心概念、概念间关系来构建学科概念网络；
3. 选择合适的案例来体现每个概念的提出和运用，促进对概念的理解；
4. 标注书籍、论文、项目、案例、习题等到这个学科概念网络上；
5. 结合概念网络上的分析算法（例如学习顺序算法、自适应诊断性检测算法）来设计和开展教学实践。

这其中最关键的就是对学科大图景的梳理。那么，物理学学科大图景，也就是物理学的典型研究对象、典型研究问题、典型思维方式、典型分析方法、和世界还有其他学科的关系，到底是什么呢？

- 物理学研究可测量的对象，研究这些对象的状态、状态变化、状态变化的原因
- 物理学研究可测量的对象，研究这些对象的结构。有的时候结构本身就是物理学感兴趣的问题，有的时候是为了研究状态而进一步研究结构
- 物理学采用概念抽象和数学建模、数学计算推理的方式来开展研究

- 物理学的概念抽象和数学建模受实验启发并接受实验检验
- 物理学采用分解和综合的方式来开展研究，例如从物质到分子，到原子，到质子中子电子光子，乃至到更加基本的粒子，再从这些基本粒子及其之间的相互作用回到分子，回到物质
- 物理学所研究的变化和结构原则上可以包含最简单到最复杂的对象，只要是能够用变化、结构、变化和结构之间的联系来研究清楚的对象和问题，但是，实际上，往往某一类或者某个层次的变化和结构会形成相应的具体的科学学科。例如研究化学变化和相应的核外电子构形的化学，研究生命体之中的物理化学过程以及生命体的功能以及功能和物理化学过程之间联系的生物学
- 物理学是所有其它自然科学，甚至一定程度上是大量社会科学的基础
- 物理知识具有系统性，或者说人类对于知识具有系统性的要求，不管出于创造、学习还是使用知识的目的，还是说由于人类认知能力的限制，还是说由于世界中的对象本来就具有系统性
- 物理学除了是对象的知识的学科，还是分析方法的学科，例如分解和综合在其它学科的迁移，个体-整体桥梁学科统计物理学的方法——例如相变和集体行为——在其他学科的迁移

合起来用一句话概括，就是之前写下来的：物理学或者科学就是通过实验启发、概念和数学建模计算、实验检验来得到的具有系统性的知识，以及得到这些知识的过程中总结出来的前面的方法——实验启发、概念和数学建模计算、实验检验。本书会围绕以上这个物理学的学科大图景来决定教什么怎么教，把物理学学科大图景体现在具体知识的学习之中，把理解型学习体现在物理学的学习之中，一切都是为了帮学习者更好地体会到物理学的学科大图景，以及顺便掌握一下理解型学习。

其实，这个具体知识和学科大图景以及超越学科的一般性人类思维还有教和学的方法的关系，就是系统思维 [3]：通过直接和间接联系，从个体看到整体，从整体的角度来看个体。我们把它叫做“系联性思考”。不仅仅是学科学习，在面对任何系统的任何问题的时候，系联性思考——也就是

通过把这个系统在各个层次做分解和综合，看到在各个层次上各个部分之间的联系，进而从整个系统的整体功能的角度来看其每一个部分的作用和地位，从这个系统的每一个部分来看到这个系统的整体的功能——往往可以给我们提出和解决问题的启发。而且，更进一步，系统科学还在此思维方式的基础上，发展了一些分析方法，解决了一些典型问题 [3]。因此，我们也希望通过这本书，你不仅仅学会物理学，体会到物理学学科大图景，学会理解型学习，还能体会到系统思维的核心“系联性思考”，而且都是通过做中学、创造中学，而不是通过这些高层知识的被说教，或者被强迫记住，来学习。

本书对数学的要求

在我们开始中学物理的学习之前，我们希望你最好有下面的数学的知识和思维的基础。如果没有这个基础，你可以先试着学下去，遇到问题了再想办法补上，或者你也可以先去学习《小学数学这样学》[4]、《中学数学这样学》[5]，然后再来看本书。顺便，在科学知识上，我们不需要基础，但是，如果看过《小学科学这样学》[6] 会对本书的学习有帮助。

首先，我们希望你知道的数学知识有：

1. 大概了解单位，尤其是长度单位和时间单位；

2. 会用字母表示数、表示常量和变量（相比数，变量多了单位以及相应的对象，例如 1 和 1 秒长的时间），并且把这些字母依据相应的关系写成表达式，以及反过来，从表达式看出来相应的这些字母所代表的量之间的关系；

3. 大概了解函数的概念（自变量，因变量，函数图像），会一次函数、二次函数的图像（图像中的重要元素，例如斜率、截矩、对称轴、极值、x 轴交点等和函数的代数式之间的关系）；

4. 等式的性质，以及通过等式的性质来求解一元一次方程、一元二次方程；

5. 三角形、四边形（包含其特殊情况梯形、平行四边形、长方形、正方形）的内角、周长、面积的定义和计算，圆的周长和面积的定义和计算；

6. 长方体、正方体的表面积和体积的定义和计算；

7. 平行线、相似三角形和全等三角形的判定和性质；

8. 四则运算和运算律（加法结合律，加法交换律，乘法结合律，乘法交换律，乘法对加法的右侧分配律）；

9. 初步理解数学中的“抽象”：从“数 + 量 + 物”经过“抽象”，也就是忽略“量”和“物”（从而适用于任何“量”和“物”），而得到非负整数；

10. 更进一步从上面的非负整数的抽象过程，领会到数学概念、数学思维和现实的关系——数学受现实启发；

11. 从几何初步进一步领会到数学知识的系统性，而且是从数的知识到形的知识的迁移，左右贯通这个系统性；

12. 会求解数学应用题，并且在求解数学问题过程中，不依靠题型和口诀，而是每次去做数学解题 WHWM 四问：这个问题里面有哪些东西（What，有什么），这些东西之间具有什么关系（是如何相互联系的，How），这个联系如何用数学来表达（How），为什么它们之间有这个关系（Why），为什么这个关系对于解决这个问题是重要的（Why），通过解决了这个问题我学习到了什么体会到了什么，这个问题对我来说意味着什么（Meaningful）；

13. 通过把数学用于提出和解决实际生活中的问题，以及前面提到的这些数学概念和数学思维的提出和发展的过程，领会到数学建模五步：提出有关实际对象的问题，把问题转化为数学问题，求解数学问题，通过实验或者实践来检验得到的答案，对问题、答案、解答、这个过程中的分析方法思维方式做总结提炼然后尝试系统化和推广；

14. 从以上的证明、抽象、解决实际问题等过程中体会到数学是思维的语言，数学是描述世界的语言。

另外，本书的写作方式非常的结构化和套路化，每次就按照下面四个问题来展开：我想给读者传达什么（What）最关键的信息，我想如何（How）来传达这个信息，我为什么（Why）要传达这个信息为什么要这样来传达，我预期我的读者们会觉得怎么样对我的读者来说有什么意义（Meaningful）。因此，你在阅读本书的时候，也最好对这个结构和套路具有一定的了解，问相应地以下几个问题：这本书（这一章、这一节，这一段、这一句）想给我传达什么（What）最关键的信息，作者是如何（How）来传达这个信息的，作者为什么（Why）要传达这个信息为什么要这样来传达，我觉得怎么样对我有什么意义（Meaningful）。这被我称作 WHWM 分析性阅读和分析性写作。本质上仍然是分解和综合，系联性思考，或者说上下左右贯通，例如，当我们在思考 How 的时候，往往需要从当前的层级，例如章，走到节，思考每一节的主要意思是什么，节之间的关系是什么，从而搞清楚整章的主要意思。更多关于 WHWM 分析性阅读和写作请参考吴金闪《教的更少，学得更多》[1] 以及《小学语文这样学》[7]。因此，在学习本书之前，看一下这两本书也会有助于更好地理解这本书。

第一部分

初中篇

第一章　直线上物体的运动

Measure what is measurable, and make measurable what is not so.

测量那些能够被测量的，（尽可能地）把还不能测量的变成能测量的。

To understand the Universe, you must understand the language in which it's written, the language of Mathematics.

要理解这个宇宙，你必须理解它的语言——数学。

– Galileo Galilei（伽利略）

1.1　直线上物体运动的建模

当我们关注一个在给定直线上运动的物体的运动的时候，显然，如果我们知道每个时刻 t 这个物体在哪里，就完全了解了。也就是说，我们需要用两个变量构成的函数 $x(t)$ 来描述一个在给定直线上运动的物体的运动。这里我们用到了直线上的点 P 和数 x 完全一一对应这个来自于数学的实数部分的知识。因此，我们说，在给定直线上运动的物体的运动的数学模型就是 $x(t)$。这样，基于生活经验，我们就得到了在给定直线上运动的物体的运动的数学模型——任意给定时刻 t 直线上的点所对应着的坐标 $x(t)$。注意，由于这个数学模型的背后是数轴，因此，x 之间的四则运算以及运算律，这里也满足。

原则上，我们还需要一个关于时间 t 的数学模型。不过，这里，基于生活经验，我们也可以认为，时间是一个不随着观测者和运动物体变化而变化的均匀流逝（它还不回头）的量[1]。

[1]将来，我们需要基于更精细的实验以及更深入的思考来否定这个基于生活经验的时间

为了获得这个 $x(t)$，我们需要测量时间 t 和那个时刻的位置 x 的办法。通常这些测量需要相应的仪器，以及相应的这些仪器的操作方法。这个我们稍后介绍。在那里，我们还会看到，确实时间 t 和位置 x 满足数轴上的数的四则运算以及运算律。

当然，如果我们需要考虑二维平面上的运动，我们就需要一个稍微复杂一点的数学模型，$(x(t), y(t))$。如果我们需要考虑扔出去的一个篮球，则我们还需要在三维空间内来考虑这个篮球的运动，我们就需要一个更加复杂一点的数学模型，$(x(t), y(t), z(t))$。将来我们把这些合起来记作 $\vec{r}(t)$，让这个 $\vec{r}$ 在一维、二维、三维的时候分别对应着上面的三种情况。

1.1.1 匀速直线运动的建模

为了给学习物理做准备，我们来从生活经验和过去已经学过的知识开始学点数学。这一节，我们主要关注 $x(t)$ 函数、$x-t$ 图、现实中的运动的描述、$v(t)$ 函数、$v-t$ 图之间的转换关系。由于是学习数学，我们先不管位移、时间的准确测量，速度的准确定义和测量等问题，先把这些量当做本来就存在而不需要证明其存在的东西。稍后我们会回到这些问题。

从生活经验和函数的基本定义，我们知道，一个速度大小相同在一条给定直线上运动的物体，其速度和时间的函数关系肯定是

$$v(t) = v_0. \tag{1.1}$$

特殊地，当 $v_0 = 0$ 的时候，物体静止，也就是位置固定，是一个常数，

$$x(t) = x_0. \tag{1.2}$$

其中，我们把那个固定的位置，也就是从初始一直都在同一个点的那个点，记作 x_0。原则上，你也可以重新约定 x 轴的起点，把这个 x_0 当作新的坐标轴的零点。例如，我们本来打算走到离我家 1000 米远的小明家再开始匀速直线运动（这时候，这个匀速直线运动的起点在我家的 1000 米外，也就是 $x_0 = 1000$），但是，当我们约定别从我家开始度量位置了而直接从小明

的模型。具体到了学习相对论的时候我们会来学习。目前，我们暂时接受这个独立而均匀地流逝的时间的数学模型。

家开始度量的时候，则这个时候，新的度量下就有 $x_0 = 0$。不过，更一般地，我们往往事先已经约定一个位置的零点。因此，最好我们还是带着这个常数 x_0。

当速度是一个不等于零的常数的时候，根据我们知道的匀速直线运动的知识，也就是，每一个单位时间物体都会前进 v_0 这么远，因此，任意时刻，

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0). \tag{1.3}$$

其中，我们引入了时间常数 t_0，表示，从 t_0 时刻开始，物体开始这样运动。之前怎么运动，我们不知道，不关心。当然，我们也可以调整一下计时的起点，把 t_0 就当成新的时间零点 $t_0 = 0$。比如说，我们打算早上 6 : 00 出发开始做匀速直线运动，当我们约定，早上 6 : 00 就是我们的新的计时起点的时候，我们说，我们在约定的 0 时刻出发。时间的零点往往我们具有比位置的零点具有更大的选择的于地。因此，我们一般可以扔掉这个常数 t_0。也就是，

$$x(t) = x_0 + v_0 t. \tag{1.4}$$

为什么全程速度相同的时候，位置和时间是这样的关系呢？这就牵涉到乘法的含义，以及乘法和加法的关系了。全程速度相同就意味着，没过一段时间，这个物体前进相同的距离，于是这段时间内的位置的变化量——称为位移——相同。也就是说，过 t 个这样的相同的时间单位，其位置变化量就是要做 t 次累加，也就是 $x(t) - x_0 = \underbrace{v_0 + v_0 + \cdots}_{t}$，而重复的加法就是乘法，我们得到 $x(t) - x_0 = v_0 t$。

我们来看公式 (1.3) 这个函数的图像。在 $x-t$ 坐标下，我们知道，$x(t) = x_0 + v_0 t$ 是一条直线，斜率为 v_0，和 $t = 0$ 这条直线的截距是 x_0。画出来，就是插入图 。

我们来看看，现实中，这个物体在做什么运动。我们发现，在计时的起点，这个物体在离开直线原点 x_0 的地方。然后，这个物体就开始做速度为 v_0 的运动。假设 $v_0 > 0$，那么，这个物体就沿着这个直线的约定好的正方向做匀速直线运动。如果 $v_0 < 0$ 呢，就是沿着相反的方向运动。

我们再来看看，这个运动在 $v - t$ 图中的样子。一过了计时的起点，这

个物体就具有了速度 v_0[2]，然后一直维持这个速度。把这个函数写出来，就是 $v = v_0$。画出来就是一条平行于 t 轴的直线，表示以后速度就都是 v_0 这个值了。插入图，跟 $x - t$ 图放一个图里面，用子图 (a),(b)

这样，我们就完成了关于匀速直线运动的完整的描述，包含 $x-t$ 函数、$x-t$ 图、现实中如何运动、$v-t$ 函数、$v-t$ 图之间。其中任何一样都是自足的描述，也就是说，我们只需要知道其中的一样，就可以知道其它的[3]，它们之间可以相互的转换。

例 1.1 ($x - t$ 函数、$x - t$ 图、现实、$v - t$ 函数、$v - t$ 图之间的转换). 给定下面的一个物体运动的每个时刻的位置，也就是 $x - t$ 函数，你来转化成 $x - t$ 图、现实中的的运动的描述、$v - t$ 函数、$v - t$ 图。

$$x = \begin{cases} 2t & 0 < t \leqslant 1, \\ 2 - 2(t-1) & 1 < t \leqslant 2. \end{cases} \tag{1.5}$$

画图。

用语言描述在直线上如何运动。

$$v = \begin{cases} 2 & 0 < t \leqslant 1, \\ -2 & 1 < t \leqslant 2. \end{cases} \tag{1.6}$$

画图

现在，你还会了多个匀速直线运动的组合的描述，以及这些描述方式之间的转换。

习题 1.1 ($x - t$ 函数、$x - t$ 图、现实、$v - t$ 函数、$v - t$ 图之间的转换). 给定下面的一个物体运动的每个时刻的位置，也就是 $x - t$ 函数，你来转化成 $x - t$ 图、现实中的的运动的描述、$v - t$ 函数、$v - t$ 图。

---

[2]计时起点之前，速度是零还是已经是 v_0 的问题，我们暂时不管。将来我们会发现，这个速度不能从 0 直接变成非零的 v_0。这需要有一个过程，一段时间。不过，暂时，我们可以认为这个时间和后面维持速度 v_0 的时间相比很小很小，小到可以暂时忽略。

[3]其实，当我们从 $v - t$ 函数开始的时候，还会牵涉到一个待定的初始位置 x_0。这个我们稍后再来详细讨论。

$$x=\begin{cases}3+2t & 0<t\leqslant 1,\\ 5 & 1<t\leqslant 2,\\ 5-4(t-2) & 2<t\leqslant 3.\end{cases} \tag{1.7}$$

有了这个 $x-t$ 函数，$x-t$ 图、现实中的的运动的描述、$v-t$ 函数、$v-t$ 图来描述匀速直线运动的基础，我们还是基于生活经验试试来描述一个速度会变化的运动过程。注意，我们目前还是不知道速度的准确的定义和测量哦，更加不知道速度的变化的准确定义和测量了。不过，对于下面这个“大概描述 100 米跑”的任务来说这不是大问题。

1.1.2　试试大概描述一下 100 米跑比赛

请你来想象一下你自己跑 100 米的过程。一开始你的速度肯定为零。在收到开跑的信号之后，你开始了你的加速阶段。加速一段时间以后，你的速度就不太能再提高了。于是达到最大速度，然后近似匀速地运动一段时间。如果你足够厉害你可能等到快到终点的时候还可以再次启动加速阶段，直到冲过终点以后开始减速，一直到停下来速度为零。如果你的体力稍微不足，那么，你可能中间的近似匀速阶段会后还会经历一个由于体力不够而不得不减速的过程。最后跨过终点线之后减速到速度为零的阶段就不一定是直线运动了。不过，大多数跑道百米尽头还有一段供你减速的距离，因此也差不多还可以认为是直线运动。实际上，前面的到达 100 米之前的过程可能也不是直线运动，有的田径场的直道可能不够 100 米。不过，在室外 400 米标准田径场上，100 米跑的起点往往设置在延长线上，就是为了使得全程都在直线上进行。我们暂时忽略这个是否是直线的细节（顺便，想想真的可以忽略吗，尤其是当我们要考虑 100 米世界纪录的时候，也就是不同地点的不同选手的百米总时长需要相互比较的时候?）。

现在，我们来把这个由语言所描述的现实中的运动过程大概画成一张 $v-t$ 图，然后再来转化成一张 $x-t$ 图。不需要很准确，大概意思对就行。画图，可以把体力充沛和体力不足的分开画。

现在有了这个的大概的描述，请你来给真实的运动做一个测量画一个图。最简单的方法是，你去找很多个可以测量速度的仪器，例如检测汽车超

速与否的多普勒雷达，也叫多普勒测速器，在跑到的多个位置安装好，测量那个点上跑步者的速度，同时记下来跑步者到达每个点的时间。你就可以画出来 $v-t$ 图了。你也可以用一个多普勒雷达，让跑步者配合你跑很多次，尽量用相同的模式（想想为什么要有这个要求）——什么时候加速什么时候减速每次都尽量一样——来跑每一次，然后，你在不同的地点来测量其速度。你也可以先大概做个测量，然后把上面想象出来的几个阶段和实际跑步者的跑 100 米的过程对应关系，找出来大概在哪个位置，然后，就在那几个每个阶段的转变点来测量其速度和每个阶段的时间。最好你在跑道上每隔若干米的地方做个标记，这样你的位置测量会简单很多。

注意，在有了 $v-t$ 图之后，我们得到 $x-t$ 图的时候，我们要把速度的大小和位置变化的快慢联系起来：速度更大，位置增加更快，也就是 $x-t$ 曲线更陡峭。

好了，现在我们算是基本把 100 米跑的过程的现实中运动过程的描述、$v-t$ 图，$x-t$ 图搞清楚了。那除了通过这个例子来学会一下如何得到这三者以及这三者之间的转换，还有什么可能的现实意义吗？有。一旦我们搞清楚每一个个体的详细的加速和减速的时间点之后，再通过对比这些个体的总时间，我们可以第一得到比较通用的好的 100 米跑的模式，然后进一步，针对每一个个体找到最适合这个个体的 100 米跑的模式。实际上，这就是运动和科学的结合的初级的例子。

1.1.3 匀速直线运动的简单应用：追及问题和实验检验

例 1.2 (追及问题). A、B 在同一条直线上做匀速直线运动。A 在 B 前面 L 处，以 v_A 的速度往前运动。B 以 v_B 的速度追赶 A。问多长时间 B 会追上 A。

我们只需要把相应的 $x-t$ 函数表达出来，然后，把“相遇，追及”转化为一个表达式 $x_A=x_B$ 就行。也就是，

$$x_A = L + v_A t, \tag{1.8a}$$

$$x_B = v_B t, \tag{1.8b}$$

$$x_A = x_B. \tag{1.8c}$$

求解方程得到，

$$t = \frac{L}{v_B - v_A}. \tag{1.9}$$

对物理现象做概念建模和数学建模，搞懂意思，把意思转化为表达式，区分已知和未知之后对表达式做运算。检验运算结果。最后计算结果和实际测量值的对比检验，实际上相当于在检验：速度的测量，是否真的是匀速，是否真的是直线，以及在这些条件下上面的变量选取和函数关系的描述，对描述得到的表达式的计算，也就是数学模型和计算，是否正确。

习题 1.2 (追及问题)**.** *A、B 在同一条直线上做匀速直线运动。A 在 B 前面 L 处，以 v_A 的速度往前运动。A 出发之后的 t_0 时间以后，B 以 v_B 的速度追赶 A。问多长时间 B 会追上 A。(参考答案：$t = \frac{L+v_A t_0}{v_B - v_A}$)*

小知识 1.1. *[阿基里斯追不上乌龟：物理逼迫数学提出极限的概念和解决无穷级数求和的收敛性问题] 历史上，有一个非常聪明的人Zeno (芝诺) 提出来过一个非常深刻而神奇的问题：跑的速度奇快的神阿基里斯肯定追不上跑的很慢乌龟！*

我们都知道只要时间允许，跑得快的和跑得慢的两者之间初始的距离有限，快的总是能够追上慢的。甚至，我们前面都算出来了追及所需要的时间。因此，这个命题肯定是错的。

那么，Zeno是怎么说的呢？为了使得问题说起来更简单，我们假设阿基里斯的速度就是乌龟的两倍，$v_A = 2v_T$。首先，Zeno说只要想追上，阿基里斯总得经过乌龟原来的位置 L_0。可是，当阿基里斯走到乌龟原来的位置的时候，乌龟就走到了往前初始距离一半的地方 $L_1 = \frac{1}{2}L_0$ ($L_1 = v_T\frac{L_1}{v_A}$)。接着，阿基里斯下一次还得走到乌龟前一个位置，也就是走 L_1，而在相同的时间内乌龟会往前走 $L_2 = \frac{1}{2}L_1$ ($L_2 = v_T\frac{L_1}{v_A}$)。类似地，每次阿基里斯都不得不经过乌龟上一次的地方 L_{n-1}，而同时呢乌龟就会到达一个 $L_n = \frac{1}{2}L_{n-1}$ 的地方。你看，阿基里斯永远追不上乌龟啊，因为 $L_n > 0$ 永远都不完全等于零。

当然，你要真的取算一下，就会发现，$L_n = \frac{1}{2^n}L_0$。于是，只要 n 足够大，L_n 会越来越接近零。但是，总是大于零啊！

这就是Zeno 佯谬之一“阿基里斯追不上乌龟”的含义。

那么，现代物理学和现代数学是如何来回答这个问题的呢？我们明明

就知道速度快的肯定能够追得上速度慢的。但是，上面芝诺的说法好像也很有道理。怎么回事呢？

其实，更加重要的事情是所需要的时间。我们来算算每一次这个阿基里斯走到乌龟的前一个位置的时间，

$$t_n = \frac{L_n}{v_A} = \frac{L_0}{2^n v_A} \triangleq \frac{1}{2^n} t_0. \tag{1.10}$$

这个时间间隔是越来越短的。其中，我们把第一次这样做需要的时间定义为 $t_0 = \frac{L_0}{v_A}$。那么，问题来了：尽管我们看起来需要无穷多次，也就是 $n \to \infty$，才能使得 L_n 足够接近 0，于是看起来永远也追不上，但是，由于每次需要的时间在缩短，很有可能**无穷多步加起来的总时间是有限的**。我们来算算总时间试试看，

$$t_T = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots = t_0 + \frac{1}{2} t_0 + \frac{1}{2^2} t_0 + \cdots. \tag{1.11}$$

我们两边乘上一个 $\frac{1}{2}$，就得到

$$\frac{1}{2} t_T = \frac{1}{2} t_0 + \frac{1}{2^2} t_0 + \frac{1}{2^3} t_0 + \cdots. \tag{1.12}$$

于是，两者相减一下，我们有

$$t_T - \frac{1}{2} t_T = t_0. \tag{1.13}$$

于是，最后得到，

$$t_T = 2t_0. \tag{1.14}$$

我们发现，由于 t_0 是有限的，因此，t_T 也确实是有限的。

因此，我们得到了，尽管从Zeno构建的逻辑步骤来看，需要无穷多步阿基里斯才能追上乌龟，但是，这个无穷多步合起来的时间其实是有限的。于是，阿基里斯可以在有限的时间内追上乌龟。当然，在这里还有一个阿基里斯和乌龟之间的距离，按照Zeno构建的逻辑步骤来看会越来越小但是永远大于零，和真正追上也就是等于零的问题——后来数学上叫做“无穷小”和“收敛数列”的问题。

物理学给了数学提出和解决无穷项等比序列求和 $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n (0 < q < 1)$ 的计算这样的一个问题，以及无限缩小的数列是否收敛这样的一个问题的

启发，当数学发展起来解决这些个问题的概念——称作“无穷极限求和”或者“积分”、“无穷小”和“收敛数列”——之后，反过来帮助物理学用来描述现实。

顺便，这样的看起来就知道其结论不对，但是其论证过程的错误不好找到，或者说，至少在当时的概念框架下看来找不到这个论证的漏洞的一个说法，一个命题，就称为佯谬。佯谬往往对于学科概念框架的发展，对学科理解的深入是具有深远的意义的。对任何严肃的但是错误命题的批驳，除了从结果上证明其错误，还需要从论证过程上直接迎头而上当头棒喝证明其错误。这样做往往具有深远的意义，例如促进理论的发展。

习题 1.3 (阿基里斯追乌龟的一般计算)**.** 重复以上的阿基里斯追乌龟的每一步的计算，证明如果阿基里斯和乌龟在同一条直线上做匀速直线运动。乌龟在阿基里斯前面 L 处，以 v_T 的速度往前运动。同时，阿基里斯以 v_A 的速度追赶乌龟，则经过有限长的时间阿基里斯会追上乌龟。（参考答案：$t=\frac{L}{v_A-v_T}$）

1.2 位置（位移）的测量

测量仪器的最小刻度最小单位。测量记录：数字，单位，准确位，估计位，误差。

两个测量记录相加减的操作，及其和误差的关系。

1.3 时间的测量

重复（周期性）现象当作时间的单位，看重复多少次。真的重复，每次的时间没有偏差吗？用不同的重复性现象相互印证，尽管可能一起错，但是概率变小了。

1.4 速度的测量

从时间间隔到瞬间——足够短的时间段。

1.5 关于速度和位置的一般关系的猜测和大概的实验检验

前面我们基于生活经验和之前已经学过的知识，尤其是数学知识，完成了几个运动过程的 $x-t$ 图（$x(t)$ 函数）、现实、$v-t$ 图（$v-t$ 函数）之间的转换。现在，我们来比较正式地数学化地学习一下 $x-t$ 图（$x(t)$ 函数）和 $v-t$ 图（$v(t)$ 函数）之间的转换。我们下面也不再区分一个函数（$x(t)$ 函数）和这个函数的图（例如 $x-t$ 图）。

我们还是从匀速直线运动开始。我们将展示：对于匀速直线运动，$x(t)$ 图中曲线上的每个点 (t,x) 的斜率是运动物体在这个时刻和这个位置的速度 $v(t)$（其实也可以写成 $v(x)$）；反过来，如果已知 $v(t)$ 曲线，在每个 t 时刻，我们可以通过计算这个 $v(t)$ 曲线和 t 轴上从运动起点到当前时刻 t 的部分所包含起来的面积，就能得到位移。然后，我们会拓展到一般的运动，大概地展示：对于任何运动，上面的 $x(t)$ 和 $v(t)$ 之间的关系都成立。

为此，我们先来定义位移、平均速度和瞬时速度，在我们已经有的位置、时间和位置-时间函数（$x(t)$ 函数）这些概念的基础上。**在一段时间间隔内，位置的变化量**

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) \tag{1.15}$$

称为位移。这段时间内的位移除以时间间隔，也就是时间的变化量

$$\Delta t = t + \Delta t - t, \tag{1.16}$$

称为平均速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{1.17}$$

当时间间隔很短很短的时候，也就是 $\Delta t \to 0$（读作趋于零，非常接近于零）的时候，可以认为，$t+\Delta t \to t$（读作 $t+\Delta t$ 趋于 t，非常接近于 t），算出来的这段很短很算时间内的平均速度 $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ 就是 t 时刻的瞬时速度

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t}(\Delta t \to 0) = \frac{x\left(t+\Delta t\right) - x\left(t\right)}{\Delta t}(\Delta t \to 0). \tag{1.18}$$

这个 $\Delta t \to 0$ 的条件下的分数如何计算的问题，我们将来在大学会严格来解决，现在我们通过几个例子来大概学会求解这个分数就行。

我们先来以匀速直线运动为例，算一下平均速度和瞬时速度。

例 1.3 (做匀速直线运动的物体的速度)**.** 一个做匀速直线运动的物体其位置和时间的关系有如下函数描述：$x(t) = 10m + 5m/st$。用上面的平均速度的定义计算出来，其在分别在 $t = 1s$ 和 $t = 2s$ 之后的 $\Delta t = 0.01s$ 之内的平均速度。

按照平均速度公式，$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$，我们有

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \tag{1.19}$$

$$= \frac{10m + 5m/s\,(t+\Delta t) - 10m - 5m/st}{\Delta t} = \frac{5m/s\Delta t}{\Delta t} = 5m/s. \tag{1.20}$$

我们发现，表达式中的 t 和 Δt 都消掉了，也就是不管 t 和 Δt 具体的取值，平均速度都是 $5m/s$。

既然任何时刻 t 任何间隔 Δt 内的平均速度都等于 $\bar{v} = 5m/s$，当 $\Delta t \to 0$ 的时候，瞬时速度就是 $v(t) = 5m/s$。

对于更一般的匀速直线运动，我们也可以证明，其任何时刻的平均速度都相同，于是就等于瞬时速度。实际上，这原本就是匀速直线运动的含义：速度在任何时候都相同，沿着一条直线（同一个方向）运动。

习题 1.4 (做匀速直线运动的物体的速度)**.** 一个做匀速直线运动的物体其位置和时间的关系有如下函数描述：$x(t) = x_0 + vt$。用上面的平均速度的定义证明其在任意 t 时刻之后的任意 Δt 之内的平均速度都是 v，于是，瞬时速度 $v(t) = v$。

你看，对于匀速运动，我们实际上，不需要进行关于 $\Delta t \to 0$ 的具体计算，因为 Δt 被消掉了，$\bar{v} = v$ 对于任何时刻 t 任何间隔 Δt 都成立，自然对于 $\Delta t \to 0$ 也成立。因此，瞬时速度 $v(t) = v$。将来，我们会知道对于更加一般的 $x(t)$ 如何通过 $\Delta t \to 0$ 的计算来得到 $v(t)$。在整个初中和高中阶段，我们只需要会计算这个均匀变化的情形，也就是 t 和 Δt 都可以消去的情形就可以了。

我们发现，对于匀速运动，已知 $x(t)$ 曲线，我们得到任何时刻 t 的速度 $v(t)$ 的方法是求 $x(t)$ 曲线在 t 时刻的斜率。那么，是不是更一般的非匀速直线运动，这一个关系仍然成立呢?

小知识 1.2. *[飞矢不动：瞬时速度存在吗？——物理逼迫数学解决导数的计算和提出极限的概念]* 历史上，还是这个非常聪明的人*Zeno*提出来过另一

个非常深刻而神奇的命题：瞬时速度真的存在吗？瞬时速度是定义在一个时间点上的。既然要求瞬时，则我们只有时间点 t，没有任何累积的时间段 Δt，于是自然就没有了移动距离。没有了移动距离，自然也就不可能有速度。举个例子，一个飞着的箭，我们都见过。但是，在任何一个时间点上，只要没有时间积累，则肯定没有距离，于是也没有了速度。这就是 *Zeno* 佯谬之一“飞矢不动”的含义。

那么，现代物理学和现代数学是如何来回答这个问题的呢？我们明明就知道一支真的没有射出去仅仅是靠在我们身上的箭和一个冲着我们射过来的打到我们身上的箭给我们造成的伤害是不一样的。而两者之间的区别唯一的就是速度。也就是，飞过来的箭确实有速度，在动。但是，上面芝诺的说法好像也很有道理。怎么回事呢？

实际上，我们按照在 t 时刻 Δt 时间段之内的平均速度的概念 $\bar{v} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ 可以得到分子不为零分母也不为零的一个分数，其肯定存在。然后，我们也对于匀速直线运动这个特殊的例子做了计算，发现，最后会得到，

$$
\begin{aligned}
\bar{v} &= \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \\
&= \frac{x_0 + v(t+\Delta t) - x_0 - vt}{\Delta t}, \\
&= \frac{v\Delta t}{\Delta t}, \\
&= v.
\end{aligned}
$$

其中最后一步我们发现，无论 Δt 多小，其实分子分母中的 Δt 都会消掉，因此，实际上，就算在 $\Delta t = 0$ 的极限下，$\frac{v\Delta t}{\Delta t} = v$ 仍然成立。

在数学上，这就是 $\frac{0}{0}$ 的计算。将来在“数学分析”或者“微积分”课程里面，我们会学到，$\frac{0}{0}$ 可以是一个有限的数，可以是无穷大，也可以不存在或者说不确定。

物理学给了数学提出和解决 $\frac{0}{0}$ 的计算这样的一个问题的启发，当数学发展起来解决这个问题的概念——称作“无穷小”——之后，反过来帮助物理学用来描述现实和定义速度等代表变化率的物理量。

下面我们来做反过来的例子，从已知 $v(t)$ 得到 $x(t)$，仍然以匀速直线运动为例。已知速度 $v(t) = v$ 是一个常数，我们计算从 0 时刻开始到 t 时刻的位移，或者说如果设 $x_0 = 0$，来求出来位置和时间的函数 $x(t)$。按照

速度是单位时间内的位移，并且匀速运动中速度 v 是个常数，我们知道每经过一个单位时间（例如秒），则物体前进的距离都是 v，于是有多少个单位时间，总的位移就是多少个 v 加起来，也就是 $x(t) = vt$。画图，每一秒一个格子，算加法 。更进一步，我们发现，$x(t) = vt$ 不仅仅对整数个单位时间成立，小数和分数个单位时间仍然成立。于是，我们发现，对于匀速运动，位移就等于速度曲线和时间坐标轴从起点到做关注的 t 时刻点所围成的长方形的面积。

那么，是不是其实，对于更一般的 $v(t)$，我们得到 $x(t)$ 的方法仍然相同呢，也就是去计算曲线 $v(t)$ 和对于匀速运动，位移就等于速度曲线和时间坐标轴从起点到做关注的 t 时刻点所围出来的面积呢?

我们先来考虑一个分段匀速直线运动。

$$v = \begin{cases} 2 & 0 < t \leqslant 1, \\ -2 & 1 < t \leqslant 2. \end{cases} \tag{1.21}$$

注意，将来我们会知道这样的运动实际不可能发生，速度的转变中间必然有一个时间过程。但是，将来我们会找到让这段时间很短很短的办法，于是其累积的位移也足够小，不太影响我们画出来的 $x(t)$ 和 $v(t)$ 曲线。目前，我们仅仅把它当做纯数学纯逻辑的游戏。

如果我们用前面猜测的一般规则来计算，我们发现，$v(t)$ 曲线下的面积为

$$x = \begin{cases} 2t & 0 < t \leqslant 1, \\ 2 - 2(t-1) & 1 < t \leqslant 2. \end{cases} \tag{1.22}$$

其中第一部分就是直接计算从时间 0 点开始的长方形的面积，第二部分在计算从时间 $t = 1$ 开始的长方形面积之后，要注意符号——这个面积在水平坐标轴 t 的下方，因此得按照“负”的算。你很容易就能发现，这个结果和之前你依靠现实生活的经验得到的结果相同。

在我们讨论更加一般的情形下 $x(t)$ 和 $v(t)$ 的转换之前，我们来讨论另一对和 $x(t) : v(t)$ 相似的关系 $x(t) : v(t)$，以及和“匀速运动”相似的运动，“匀加速运动”。那有助于我们来回答更加一般的情形下 $x(t)$ 和 $v(t)$ 的转换的问题。为了讨论这个匀加速运动，我们需要新定义几个物理量。但是，同样，这里仅仅当做数学知识来看待。匀加速运动的物理我们会稍后学

习到。注意，等我们稍微补充一下几个新概念之后，我们还会回到匀加速运动下，以及更加一般的情形下 $x(t)$ 和 $v(t)$ 的转换。

1.6 速度的变化——加速度的概念和测量

就如同速度是位置的变化率一样，从数学上我们**定义速度的变化率为加速度，也就是说，在 t 时刻开始的一段时间 Δt 内平均加速度的定义为，**

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \tag{1.23}$$

。**当时间间隔很短很短的时候，也就是 $\Delta t \to 0$ 的时候，可以认为，$t+\Delta t \to t$，算出来的这段很短很算时间内的平均加速度 $\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ 就是 t 时刻的瞬时加速度**

$$a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}(\Delta t \to 0) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}(\Delta t \to 0). \tag{1.24}$$

我们发现，加速度和速度之间的关系，与，速度和位置之间的关系完全相同。于是，按照 $x(t)$ 和 $v(t)$ 的转换规则，也就是 $v(t)$ 是 $x(t)$ 的斜率，$x(t)$ 是 $v(t)$ 曲线和坐标轴 t 包围起来的面积，那是不是 $a(t)$ 是 $v(t)$ 的斜率，$v(t)$ 是 $a(t)$ 曲线和坐标轴 t 包围起来的面积呢?

首先，我们还是基于生活经验来从最简单的速度有变化的运动——匀加速直线运动——开始来试试 $a(t)$ 和 $v(t)$ 之间是不是就是这样的关系。匀加速直线运动的意思就是加速度是一个常数，或者说单位时间内速度的增加量是一个常数。也就是说，速度是在变化，例如越来越快，但是其增加的“快慢”是一样的。于是，自然之前的多个单位时间之后速度增加量等于把每一个单位时间内的增加量加起来，也就是单位时间内的增加量乘以累计的时间。用数学语言表示，就是

$$a(t) = a, \tag{1.25}$$

$$v(t) - v_0 = \underbrace{a + a + \cdots}_{t} = at. \tag{1.26}$$

并且，就算 t 是分数和小数个单位时间，上面的等式仍然成立。于是，我们看到，速度变化量等于加速度和 t 坐标轴围起来的面积。反过来，我们可以

计算匀加速运动，已知 $v(t) = at + v_0$，是不是可以通过计算斜率得到加速度 a。我们从平均加速度开始

$$\bar{a} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{at + a\Delta t + v_0 - at - v_0}{\Delta t} = \frac{a\Delta t}{\Delta t} = a. \tag{1.27}$$

也就是通过计算斜率得到的平均加速度在任何时刻 t 任何时间间隔 Δt 内都是 a，正好就是我们预期的瞬时加速度的值。于是，至少在匀加速直线运动上，$a(t)$ 是 $v(t)$ 的斜率，$v(t)$ 是 $a(t)$ 曲线和坐标轴 t 包围起来的面积，通过了逻辑上的检验。

插入图，匀加速直线运动计算 $v(t)$ 斜率和 $a(t)$ 下面积的示意图

现在，我们假设一般情形下 $v(t)$ 和 $x(t)$ 以及 $a(t)$ 和 $v(t)$ 的上面猜测的关系仍然正确，然后来运用这个关系，看看匀加速运动的 $x(t)$ 长什么样。我们发现，如图，要从匀加速运动的 $v(t)$ 得到 $x(t)$，我们需要计算梯形的面积，也就是

$$x(t) - x_0 = \frac{1}{2}(v(t) + v_0)\,t = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t. \tag{1.28}$$

于是

$$x(t) = \frac{1}{2}a\left(t + \frac{v_0}{a}\right)^2 - \frac{v_0^2}{2a} + x_0. \tag{1.29}$$

如果学习过二次函数曲线，我们知道这就是一条把基本二次曲线 $x = t^2$ 经过移动和缩放之后得到的曲线。注意，这里真的是弯曲的了，而不再是我们之前的所有的计算中的曲线的特例——直线和折线——了。

插入图，匀加速直线运动计算 $v(t)$ 下面积的示意图

现在，我们反过来把 $v(t)$ 是 $x(t)$ 的斜率，$a(t)$ 是 $v(t)$ 的斜率用到匀加速直线运动的 $x(t) = \frac{1}{2}a\left(t + \frac{v_0}{a}\right)^2 - \frac{v_0^2}{2a} + x_0$ 上来看看，是否能够得到自洽的 $v(t)$ 和 $a(t)$。为了下面的计算简单，我们取 $x_0 = 0, v_0 = 0$。更一般的情况留作练习题。

我们套入定义，在 t 时刻 Δt 间隔内的平均速度为

$$\begin{aligned}\bar{v}(t) &= \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{\frac{1}{2}a(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}at^2}{\Delta t} \\ &= \frac{\frac{1}{2}2at\Delta t+\frac{1}{2}(\Delta t)^2}{\Delta t} \\ &= at+\frac{1}{2}\Delta t. \end{aligned} \tag{1.30}$$

然后，我们在 Δt 趋于零的条件下来看看瞬时速度，

$$\begin{aligned}v(t) &= [\bar{v}(t)](\Delta t\to 0) \\ &= \left[at+\frac{1}{2}\Delta t\right](\Delta t\to 0) \\ &= at. \end{aligned} \tag{1.31}$$

最后一步的逻辑过程大致如下：当 $(\Delta t\to 0)$ 的时候，$\left[at+\frac{1}{2}\Delta t\right]$ 中的第一项 at 不依赖于 Δt 因此保持不变，第二项 $\frac{1}{2}\Delta t$ 也趋于零，于是消失。你看，我们得到了自洽的速度表达式。当然，我们可以继续求出来加速度，过程和结果就如公式 (1.27)，$a(t)=a$。于是，我们也得到了自洽的加速度的表达式。

合起来，我们现在的计算能力和 $v(t)$ 和 $x(t)$（还有 $a(t)$ 和 $v(t)$）之间的求面积和求斜率关系，已经超越了匀速运动的情路了：匀加速运动的位置和速度之间的关系就超越了匀速运动的位置和速度关系——前者速度不再是常数而后者速度是常数。

插入图，匀加速直线运动计算 $x(t)$ 的斜率和 $v(t)$ 下面积的示意图

习题 1.5 (从位置函数得到速度和加速度的函数 *). 针对 $x(t)=\frac{1}{2}a\left(t+\frac{v_0}{a}\right)^2-\frac{v_0^2}{2a}+x_0$ 算出来相应的 $v(t)$ 和 $a(t)$。

1.7 一般情形下 $x(t)$ 和 $v(t)$ 的转换

前面我们已经知道，对于直线段构成的折线，这个 $v(t)$ 和 $x(t)$（还有 $a(t)$ 和 $v(t)$）之间的求面积和求斜率关系成立；对于匀加速直线运动的

$x(t)$ 二次曲线，这个也关系成立。那么，这个关系对于一般的情况是不是真的是正确的呢，如果正确为什么这个关系是正确的呢？将来在一门叫做微积分的数学分支学科或者说课程中，这个关系会被严格地证明。现在，我们通过画图的方式来大概有一个认知。我们借助折线来达到这个认知。

我们先来看一般情形下的从 $v(t)$ 到 $x(t)$ 的求面积关系。我们把 $v(t)$ 分成一段段的折线。为了符号更简单，我们取每一段的时间间隔 Δt 为同一个值。然后，我们把每一段的首尾用直线相连。这样，原来的 $v(t)$ 曲线就成了一条折线。可以想见，Δt 越小，则折线越接近原来的 $v(t)$ 曲线。对于折线，我们已经从定义证明了，得到 $x(t)$ 的方式就是计算折线下到 t 轴包围的面积。因此，只要折线和原来的 $v(t)$ 曲线足够接近，那么，我们相当于用折线下包含的计算面积的方式得到了 $v(t)$ 相对应的 $x(t)$。那么，是不是我们永远可以做到折线和原来的 $v(t)$ 曲线足够接近呢？这还需要我们进一步用数学中的“极限”和“无穷小”的概念来严格证明，不过，我们可以想象到只要我们让 Δt 足够小，我们总是可以让折线和原来的 $v(t)$ 曲线足够接近。严格的证明就等到以后大家学会了微积分再来做了。

我们再来看一般情形下的从 $x(t)$ 到 $v(t)$ 的求斜率的关系。同样的道理，我们把 $x(t)$ 曲线分成一段段的折线，取每个时间间隔 Δt 为同一个值，我们把每一段的首尾用直线相连。然后，对于得到的足够接近原来的 $x(t)$ 曲线的折线，我们之前已经从定义得到，其 $x(t)$ 就是每一段折线所对应的斜率。同样地，只要我们保证在 Δt 足够小的条件下，我们的替代折线和原来的 $x(t)$ 曲线要多接近就有多接近，则我们就得到了原来的 $x(t)$ 曲线对应的 $v(t)$。

插入图一般曲线 $x(t)$ 折线化得到斜率，和，一般曲线 $v(t)$ 折线化求面积的示意图

好了，到此为止，除了“只要 Δt 足够小，我们总是可以用折线无限接近一条曲线[4]”这个有待数学的证明，我们已经展示了，一般情形下，$v(t)$ 和 $x(t)$（还有 $a(t)$ 和 $v(t)$）之间可以通过求面积和求斜率来相互转换。

像 $a(t)$ 和 $v(t)$，$v(t)$ 是 $x(t)$ 这样的关系被称为变化率和累积量之间的关系。将来我们会发明一套称作“微积分”的数学来表述和处理这个关

[4]将来我们会发现这样的曲线有个条件，例如可微函数的曲线，或者说连续函数的曲线，不过我们物理中的物理量的曲线往往满足这个要求。

系。关系完全相同就会导致完全相同的数学操作，这就是数学的巨大威力。你只要依赖于其中的一个具体例子来学会描述背后的关系数学，你就可以用于任何其他具有相同关系的具体例子。这也就是抽象的为例。甚至，如果有一天你遇到了一个问题，尝试了任何现有的数学结构都不能描述的时候，你可以运用抽象来自己定义一个描述这个关系的数学结构。这才是非凡的创造，才是真正的数学建模。

因此，这个变化率和累积量之间的关系本身实际上是一个数学关系，不需要任何检验。但是，但我们说，位置和速度正好就是这样的关系，速度和加速度正好就是这样的关系的时候，我们就从数学关系，通过数学建模——也就是用数学关系来描述物理量之间的关系——从而转入了物理关系。而物理关系需要实验检验。

下面，我们来设计一个简单的实验来检验这一组转换关系。为此，我们需要位置、时间和速度的测量仪器。位置可以通过实现画好直线轨道，并且在轨道上标上刻度来测量，时间可以用秒表或者等间隔自动计时和拍照的手机，速度的可以用光电门测量仪器，或者多普勒雷达测量。我们的目标是独立测量得到一条 $x(t)$ 曲线，再得到一条 $x(t)$ 曲线，然后看一看两者之间是不是有变化率和累积量之间的关系。具体检验方式，可以是从测量得到的 $x(t)$ 曲线开始求斜率然后和测量得到的 $v(t)$ 曲线对比，或者反过来，从测量得到的 $v(t)$ 曲线开始求面积然后和测量得到的 $x(t)$ 曲线对比。为了简单起见，你可以仅仅考虑匀速直线运动和匀加速直线运动等简单情况。至于如何把匀速直线运动和匀加速直线运动实现出来，本来是下一章的物理部分的内容而不是本章数学部分的内容。不过，为了你能够完成这个实验，我们暂时透露一个实现匀速直线运动和匀加速直线运动的办法：在非常光滑的表面上，例如冰上，运动的小球在一段时间内可以看作是匀速直线运动；一个自由下落的小球，只要不是特别扁平，密度远远大于空气密度，可以看做是匀加速直线运动。在家里而不是物理实验室，匀加速运动可能更加容易实现一些。不过，维拉做好这个检验，有一些误差问题不大。

习题 1.6 (对 $x(t)$ 和 $v(t)$ 之间求斜率和求面积的关系的检验). *按照上一段的提示，用事先标好刻度的轨道、自动等时间间隔的拍照手机、测量速度的仪器（光电门或者多普勒雷达，可以 DIY 或者从物理实验室借，或者购买）来完成匀速直线运动和匀加速直线运动的对 $x(t)$ 和 $v(t)$ 之间求斜率和求*

面积的关系的检验。

未来我们会知道，这是数学关系——可以在纯逻辑体系内证明的关系，根本不用检验，只要速度确实定义为位移的变化率（同时也就意味着位移是速度的累积量）。不过，当前，来当作对概念化（也就是，是否我们测量到的东西正好就是位移和作为唯一的变化率的速度），或者对还不能严格完成的数学推理的替代，也挺好。

有了 $x(t)$ 和 $v(t)$ 之间的这样的关系，以后，我们就可以跳过之前我们经常使用的从 $x(t)$ 得到现实，从现实再到 $v(t)$ 这个借助现实的过程了。当然，我们得到这个关系的过程是受到了现实的启发，也接受了现实的检验。但是，以后，我们只需要做一番计算——算斜率或者算面积——就可以了。

顺便，这一节我们从数学上学习了匀加速直线运动中位置函数 $x(t)$，速度函数 $v(t)$ 和加速度函数 $a(t)$ 分别是什么以及三者之间的关系，这给我们后面学习匀加速运动的物理做了一个很好的铺垫。实际上，这就是数学和物理之间的关系的一个侧面：当数学已经给物理需要用到的描述世界的语言准备好了数学结构的时候，可以大大推动物理的研究。将来，我们还会遇到另一个侧面：当物理学描述世界的需求超越了当前数学能够提供的数学结构的时候，物理学可以推动数学的发展。其实，前面提到的物理学对瞬时速度的需求（见例如小知识 1.2 “飞矢不动” 佯谬。当然，实际上，这事儿是Newton干的，见《自然哲学的》[8, 9]）就推动了数学中的微积分的发展。

1.8 从匀速直线运动看物理学

对于运动，我们首先决定选择用位移、时间、速度、加速度这样一组量来描述现实世界中物体的运动。这部分我们后续还会进一步补充。这一步就叫做概念建模。将来，我们还会提炼其他有必要的描述运动的概念，例如质点、参考系、坐标系等等。

接着，我们用数学结构来描述这些物理概念，也就是用数学模型来描述世界。所谓用数学模型描述世界，或者说，给世界建立数学模型，在物理学而言，指的是以下的过程：首先，给所需要描述的对象找到合适的数学结构。例如，在直线上的运动而言，是 $x(t)$。其中 x 对应着物理概念位置或者位移，t 对应着时间，两者的数学对象都是实数或者说数轴。其次，这个

数学结构在具体物理问题上的表现形式是什么样的。例如，这里对于匀速直线运动就是 $x(t) = x_0 + v_0 t$。其中，x_0 对应着物理量初始位置，v_0 对应着物理量初始速度，而由于这是匀速直线运动，初时速度也等于以后的速度。对于任何一个具体的做匀速直线运动物体，其中的待定常数 x_0, v_0 都需要从实际测量数据中获得。这个两个层次的模型是否正确，需要接受实验的检验。

对物理学家而言，选择哪些物理概念和相应地什么样的数学模型来描述物理对象，需要深刻的物理直觉，甚至要经历智力上的痛苦和挑战。比如说，量子力学和相对论的数学结构[5]的提出就是如此。

物理学在构建了概念模型和数学模型之后，完全依赖于数学语言做计算推理，得到概念模型和数学模型的结果。也就是说，描述物理对象的数学结构被选择并且被应用到具体对象上之后，后面的计算推理，不需要物理直觉，只需要数学计算和证明。当然，有的时候，在这个层次形成和运用所谓的物理直觉，也会促进问题的解决，尤其是当需要做一些近似才能把模型求解出来的时候。因此，原则上不需要，不表示完全没有意义。但是，这样的辅助计算推理的所谓的直觉，尽管有的时候管用、珍贵、暂时不得不用，都是危险的。在咱们目前的例子中，完全不需要这个层次的直觉。等以后有这样的例子的时候，我们会来展示一下其作用和危险性。

概念模型和数学模型的建立，得到生活经验、实验数据（及其分析结果的归纳总结）的启发，其结果，接受实验检验。

在这里，我们首先建立了匀速直线运动和匀加速直线运动的 $x-t$ 函数和 $x-t$ 图之间的转换（这是数学），然后建立了 $v-t$ 函数和 $v-t$ 图之间的转换（这是数学），以及 $x-t$ 和 $v-t$ 之间的转换（借助了生活经验，但是仍然属于数学）。

然后，我们建立了 $x-t$ 函数、$v-t$ 函数和现实之间的转换。这是物理学：用数学表达式来表达物理世界——物体的运动。当然，这里，我们主要受到了生活经验的启发。未来面对更复杂的物理现象，可能需要依靠实验

[5]量子力学的数学结构是超越密度分布函数的经典概率论的基于密度矩阵的量子概率论，非常反直觉；相对论的数学结构是时间和空间坐标等权的可以做坐标变换的（指的是时间和空间之间可以相互之间做加减乘除成为另一套坐标，而不是时间管时间空间管空间这样的分离的）的不满足欧氏几何的距离公式——也就是大家熟悉的勾股定理——的非欧度规，也比较反直觉。

测量和分析结果的启发。

接着，我们对速度和位移的关系做了更加一般的猜测，对 $x-t$ 和 $v-t$ 之间的转换做了更加一般的猜测。原则上，这些猜测是可以要么通过数学计算推理来检验的，要么通过物理实验来检验的。不过，这些检验我们会放到后面，甚至将来高中和大学阶段，再来做。

最后，匀速直线运动的数学模型（$x=x_0+v_0t$）的正确性，以及匀速直线运动的速度和位移的关系，$x-t$ 和 $v-t$ 之间的转换，$x-t$ 函数、$v-t$ 函数和现实之间的转换，是完全可以接受实验检验的。

从这里，我们体会到，数学是物理学家做思考作计算推理以及构建模型描述世界的语言，我们还体会到，物理的概念模型和数学模型，都需要来自现实世界的输入，不管是实验的启发还是实验的检验。也就是说，物理是讲道理的（可计算可推理的）和需要接受实验检验的学科，数学是讲道理的（可计算可推理的）和不需要不屑于接受实验检验的学科。

我们再来讨论一下，为什么物理学要先研究物体的运动，学习物理学也要先从物体的运动的建模过程和模型开始。运动，更一般地来说，其实就是历史，以及从历史中收集数据，采用构建模型的方式，来达到理解这个历史发展的原因，甚至做到（在外界对所关注的系统的影响不变的条件下）对未来有一个可检验并且能够通过检验的预测。从这个意义上说，物理学不过就是历史科学的分支！只是，由于我们只关注那些可以测量（原则上，需要的话还可以把所关注的系统拆分开来成为构成这个系统的元素，或者成为子系统，然后进一步测量这些子系统，如此反复）的系统，然后采用根据测量结果来构建概念模型和数学模型的方法来研究这些系统，最后再把这些模型的结果和进一步的实验和测量相比较的方式来检验这些模型，以及最后的最后把这些模型系统化形成作为的理论，我们的“历史学”比通常那些社会系统的历史学一般来说，在理解系统和预测系统的未来行为上更加准确而已。于是，既然从历史学的角度，我们永远会关注一个系统的状态、状态的变化这些问题，那么研究事物的运动，也就是研究如何描述一个系统的状态，状态如何测量，状态如何演化，就成了任何一个科学的分支所要关注的问题。

顺便，如果一个历史学的研究主要就在收集各种事实，类似于物理学的测量，而不是构建这些事实背后的概念模型和数学模型，以及把这些模

型当作理解和预测的主要方式，那么，这样的“历史学”就可以看作“集邮”，而不是科学或者学科。

1.9 推荐阅读材料

本章推荐的阅读材料是Albert Einstein（爱因斯坦）和Leopold Infeld（利奥波德·英费尔德）的 *The Evolutin of Physics*《物理学的进化》[10]。物理学家就是探索、提出和回答关于这个世界的谜题的侦探，我们所用的“工具”或者说“武器”从原理上说也很简单，不过就是做实验来启发思考、抽象为概念、数学建模、计算推理提出命题或者说结论、实验检验命题结论。在 *The Evolutin of Physics* 中，你都可以体会到这些，并且看到物理学从机械运动走向电磁现象等其他主题以后是如何发展的，物理学家是如何思考的。

1.10 作业

习题 1.7 (已知时间和速度求位移). 一个以 $v = 2m/s$ 的速度做匀速直线运动的小球 m，经过 $t = 10s$，位置变化了多少？如果初始时刻的位置正好就是坐标原点，$t = 10s$ 的位置在哪里？如果初始时刻的位置正好在坐标原点的负方向上 $10m$ 处，$t = 10s$ 的位置在哪里？

习题 1.8 (已知时间和位移求速度). 一个做匀速直线运动的小球 m，经过 $t = 10s$，从 $x = 2m$ 位置到了 $x = 12m$ 的位置。请问 m 的运动速度是多少？

习题 1.9 (已知速度和位移求时间). 一个以 $v = 2m/s$ 的速度做匀速直线运动的小球 m，经过一段时间 t，从 $x = 2m$ 位置到了 $x = 12m$ 的位置。请问 t 是多少？

习题 1.10 (位移和路程). 一个以 $v = 2m/s$ 的速度运动的小球 m，位于坐标原点，前 $10s$ 往 x 轴正方向前进，后 $10s$ 回头往 x 轴负方向以同样大小的速度前进。请问，最终 m 的位置在哪里？其平均速度是多少？

习题 1.11 (按照时间来混合运动求平均速度). 一个小球 m，先以速度 $v_1 = 2m/s$ 运动了 $10s$，再以速度 $v_2 = 4m/s$ 运动了 $20s$，其平均速度是多少？

习题 1.12 (按照路程来混合运动求平均速度). 一个小球 m，先以速度 $v_1 = 2m/s$ 运动了 $100m$，再以速度 $v_2 = 4m/s$ 运动了 $200m$，其平均速度是多少？

习题 1.13 (按照时间来混合运动求平均速度). 一个小球 m，先以速度 v_1 运动了 t_1，再以速度 v_2 运动了 t_2，其平均速度是多少？

习题 1.14 (按照路程来混合运动求平均速度). 一个小球 m，先以速度 v_1 运动了 L_1 的位移，再以速度 v_2 运动了 L_2 的位移，其平均速度是多少？

习题 1.15 ($v-t$ 图到 $x-t$ 图). 以匀速直线运动为例，设计一个 $v-t$ 图到 $x-t$ 图的练习题。给出函数或者给出图。

习题 1.16 ($x-t$ 图到 $v-t$ 图). 以匀速直线运动为例，设计一个 $x-t$ 图到 $v-t$ 图的练习题。给出函数或者给出图。

习题 1.17 ($v-t$ 图到 $a-t$ 图). 类比之前的两个问题，以匀加速直线运动为例，设计一个 $v-t$ 图到 $a-t$ 图的练习题。给出函数或者给出图。

习题 1.18 ($a-t$ 图到 $v-t$ 图). 类比之前的两个问题，以匀加速直线运动为例，设计一个 $a-t$ 图到 $v-t$ 图的练习题。给出函数或者给出图。

习题 1.19 ($v-t$ 图到 $a-t$ 图). 匀速直线运动的 $v-t$ 图到 $a-t$ 图的练习题。给出函数或者给出图。

习题 1.20 ($a-t$ 图到 $v-t$ 图). 匀速直线运动的 $a-t$ 图到 $v-t$ 图的练习题。给出函数或者给出图。

习题 1.21 ($v-t$ 图到 $x-t$ 图). 带折线的 $v-t$ 图到 $x-t$ 图的练习题。给出函数或者给出图。

习题 1.22 ($x-t$ 图到 $x-t$ 图). 带折线的 $x-t$ 图到 $v-t$ 图的练习题。给出函数或者给出图。

习题 1.23 ($v-t$ 图到 $a-t$ 图). 带折线的 $v-t$ 图到 $a-t$ 图的练习题。给出函数或者给出图。

习题 1.24 ($a-t$ 图到 $v-t$ 图)**.** 带折线的 $a-t$ 图到 $v-t$ 图的练习题。给出函数或者给出图。

习题 1.25 (匀加速运动的平均速度)**.** 给出 $v-t$ 图，梯形，计算平均速度(梯形面积除以高)，展示其刚好等于中间时刻的速度。如果有必要，可以出一道这个例题。

1.11 本章小结

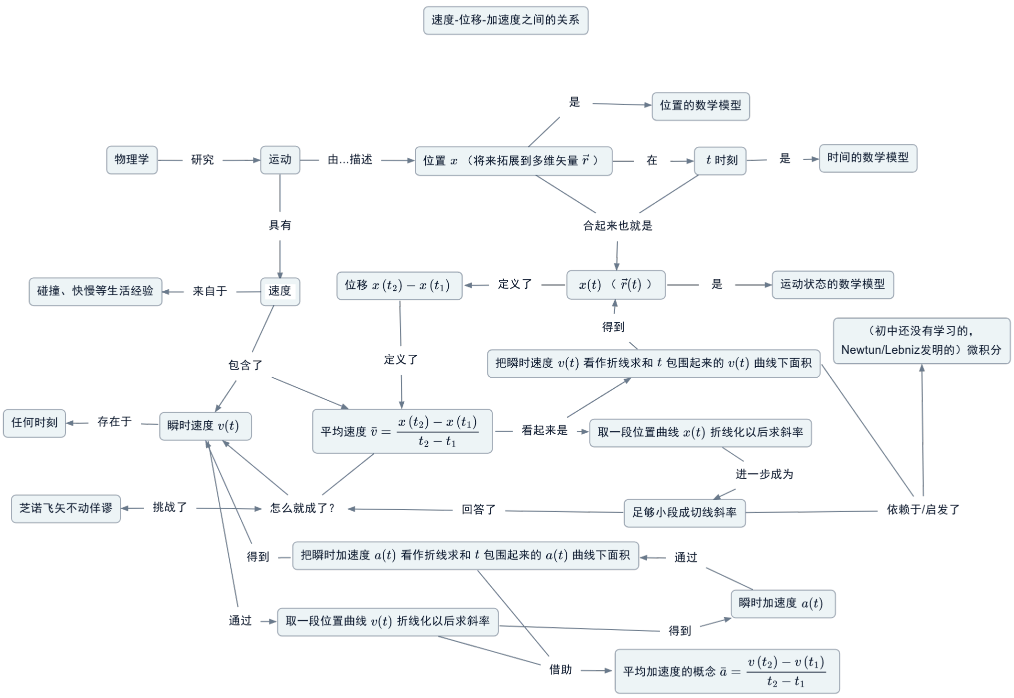

图 1.1: **位置-速度-加速度之间的关系的数学和物理**这张图体现了：物理概念的提出也就是概念模型的形成和思考和经验的关系，以及数学作为物理学的语言（当作物理量背后的数学结构成为数学模型，从而定义好物理量，形成物理概念），数学在推导物理量之间的关系中的作用也就是物理学家思考的语言。考虑横版印刷这张图。

第二章　具体的力

Impressed force is the action exerted on a body to change its state either of resting or of moving uniformly straight forward.

力就是一个物体感受到的改变其当前状态——无论是静止还是匀速直线运动——的作用。

– Isaac Newton（牛顿）

2.1　质量和重力

在这一章中，我们特意先避开什么是力的问题，而是基于生活经验来学习一些具体的力。为了学习力，我们也不得不先学习质量。前面我们已经学习了对时间和空间的测量，以及两者组合起来对速度的测量。现在，我们来学习一下质量和重力的测量，或者说质量和重力的操作性定义。如果可能的话，也稍微了解一下质量和重力的内涵式定义。

对于这一节的纯知识内容，你完全可以当做事实性知识接受和记住就行：质量的测量仪器是天平，标准单位是千克（kg），天平配有标有标准质量大小的砝码，而标准质量来自于一个叫做标准千克的定义（历史上通过一个叫做“千克原器”的物体[1]）；每一个质量为 m 的物体受到地球的引力，也叫做重力，大小为 $G = mg$，标准单位是牛顿（N），其中 g 是一个常数[2]；弹簧等满足力的大小（F）和弹簧伸长量（x）等某种可测量的效应成正比

[1]现代的定义基于光的速度、频率和普朗克常数 h。不过这些量的含义需要将来才能学到的进一步的物理知识，我们暂时采用基于千克原器的定义。

[2]将来我们会发现这个常数还依赖于一些例如离地球中心的举例等细节，因此地球上不同地方这个常数会略有不同

关系（$F = kx$）的仪器也可以用于测量重力，于是可以用于测量质量。

但是，我们不是知识型学习的教材，我们是理解型学习的教材。我们希望这些事实性知识都是你“自己想出来的”，如果有新概念，则这些概念也是你自己提炼出来的，不管是基于生活经验也就是概念形成 [1, 11, 12]，还是基于已有的概念也就是概念同化 [1, 11, 12]。我们来试试，帮助、启发和刺激你一起来想想。

从生活经验的角度，其实我们对力很有感受。例如，我们发现一个更重的东西提起来感觉更费力，一个更重的东西压到脚上更疼，甚至把我们的脚趾头压得更扁，变形更严重，如果你有过被压脚趾头或者手指头的经历的话。没有这个经验，那就拿一个水果或者馒头被不同重量的东西来压一压试试。那生活中，一个东西有多重，我们使用什么单位和什么测量仪器来给出的呢？通常，我们用斤、公斤、千克、克、吨等单位，用杆秤、电子秤、磅秤，地磅、弹簧秤等测量仪器来测量。在物理上，我们把这个“一个东西有多重”称为这个东西的质量。**质量的含义是这个物体所包含的物质的量的多少，通常用字母 m 来代表，主单位是千克**（kg）。但是，物质又指的是什么，这个多少怎么度量呢？这个问题，得等到我们学了分子原子之后才能回答。目前，我们就暂时把这个质量的定义当做一个凑合着看一看的说法，反过来，我们把被各种秤测量出来的读数当做一个物体的质量。在物理上，这叫做一个量的操作性定义：按照某个过程得到一个针对某个量的一个读数，就当做这个量的一个测量结果。

我们来看看日常生活中经常遇到这样的物体、物体的质量及其测量仪器。考虑做个表格 例如，我们会发现，人的质量一般是几十千克，也有到几百千克的，其测量工具往往是电子秤或者弹簧秤，有的时候也用磅秤。一条鱼的重量一般是几百克到几千克，也有到几十千克的，其测量工具也往往是电子秤或者弹簧秤。测量一大筐子鱼的时候，可能会用磅秤。一颗黄豆的重量往往才零点几克。再考虑到往往人们吃黄豆的时候不是就吃一颗黄豆的，而是一般来说一大碗的，因此，黄豆经常几百颗放在一起称，可以用厨房电子秤，或者弹簧秤。几百颗放在一起一般能够有个几十克到几百克。一卡车的西瓜一般是几顿到几十吨，其测量工具一般是地磅。

在这里，我们产生了三个问题：第一、这些测量仪器是怎么测出来这些物体包含的物质的量的多少的呢，先不管咱们目前还不太清楚“物质的量”

的含义是什么的问题；第二、为什么不同物体里面所包含的物质的量的多少看起来还具有某种可比性呢，因为你看同一种测量仪器往往可以测量不同的物体；第三、看起来我们是具有某种选用什么测量仪器的标准或者说大概的指南的，那这个指南的大概内容是什么，也就是测量仪器是按照什么来被选择的?

第三个问题和量程以及最小刻度有关。这个问题前面我们已经在时间和位置的测量中遇到，只需要迁移一下到这里的质量的测量就行。我们就不再展开讨论了。前两个问题其实是紧密相关的，所以我们一起来回答这两问题。

为了回答第一个问题，我们需要学习重力的概念。**重力就是一个物体在地球附近收到的引力，通常用 G 来代表，其主单位是牛顿（N）**。前面我们已经提到了我们都有更重的东西提起来感觉更费力的生活经验，然后我们也说了，更重的东西的质量更大。那么，这也就是说，质量更大的物体我们提起来感觉更费力。你看，我们似乎需要在对于费力的“力”是什么都不大清楚的条件下往前思考。为了一定程度上解决这个问题，我们把“我们提起来感觉更费力”换成“弹簧秤弹簧伸长量更大”。如果还没有这个经验，回去找一根弹簧，或者找一个弹簧秤试试。先你自己来感觉一下哪个物体更重，然后，看看是不是更重的物体挂到弹簧上，弹簧伸长量更长。有了这个生活经验和观察，那我们就可以摆脱我们的感觉了。这一步很重要：借助仪器来把我们的感觉显性化，可观察，可测量。

有了这个结论之后，我们来问，那为什么质量更大的物体挂到弹簧上，弹簧伸长量更长？我们分两步来回答这个问题。第一，我们说，质量更大的物体受到的重力更大，在地球表面附近近似记做 $G=mg$，其中 m 是质量，G 是这个物体收到的重力，g 是两者之间的比例系数；第二，为了拉住收到重力更大的物体，弹簧的伸长量更长，并且在一定伸长量的范围内重量和伸长量成正比，也就是 $G=kx$。其中 G 是物体收到的重力，x 是弹簧伸长量，k 是两者之间的比例系数。

我们先来检验第二点：是不是对于弹簧来说，拉着弹簧的拉力越大，弹簧伸长量越长，而且两者成正比。如果我们已经有拉力大小的定义，这个结论是否成立很容易检验：制造出来一些大小不同的拉力 F，作用于弹簧，测量伸长量 x，然后，检验两者是否成正比 $F\sim x$。但是，现在的问题是，

我们连力的标准大小的定义还都没有。那，我们说，能不能退而求其次，我们假设 $G=mg$ 成立（至于它是否真的成立，另外再来检验），我们一旦有了 m 的独立于重力的测量方式，那么，我们是不是可以直接来检验一下

$$mg=kx \Longrightarrow m=\frac{k}{g}x \Longrightarrow m\sim x \tag{2.1}$$

是否成立？

插入千克原器和砝码图片

于是，我们真的可以提出来一个质量 m 的独立于重力的测量方法：基于标准千克和天平。所谓标准千克就是人们约定好某一个物体的重量为 $1kg$，然后，把这个物体精确复制好多好多份，发送到世界各地。这样每一个地方就都有了一个标准千克了。甚至，人们还可以均匀地把这个物体分成若干份来构成更小的标准单位，或者把好多个这样的标准千克的物体合起来组合成更大的标准单位。前者有例如分成千分之一得到的克，后者有扩大一千倍得到的吨。**天平是什么东西呢？其原理我们稍后再介绍，但是，其作用就是一个比较两个物体来确定其质量是否相同**。有了这个天平，我们就可以用标准千克、标准克、标准吨等各种标准质量的物体来测量未知质量的物体了。当然，这样的仪器很笨，只能通过完全相同来测量。不过，只要我们不怕麻烦（我们会需要一大堆各种大小的标准单位，称为天平的砝码，例如 $0.1g$ 的，$1g$ 的，$10g$ 的，$100g$ 的，$1000g$ 的，甚至更小和更大的砝码），反正至少我们就可以测量任何一个物体的质量了。

通过实验 (2.1)，我们发现，在弹簧上，在 m 的一定范围内（这个范围对于每一根弹簧都不一样，原因是对于给定的弹簧，太小的质量会导致伸长量 x 测不出来，太大的质量会导致弹簧被永久拉长而受伤从而彻底改变了这根弹簧），$m\sim x$ 真的成立。例如，我们可以来完成下面的实验“假装着”来发现和验证一下 $m\sim x$。

实验 2.1 (检验 $m\sim x$ 的弹簧实验). *用天平的砝码来挂在一根弹簧上（注意，两者之间的连接要提前匹配好。当然，实在不行可以用轻绳绑好砝码，然后弹簧一端做出来或者接上一个钩子，然后把钩子和砝码相连。通常你可以买到已经做好连接方式的弹簧和砝码）来测量每一个质量（m）的砝码下弹簧的伸长量（x）。然后，画图检验 $m\sim x$ 是否正确。*

插入这个实验的装置图

下面是我们用几个不同的弹簧得到的实验结果。通过做图，我们发现，每一根弹簧上的结果都有 $m \sim x$，也就是 $m - x$ 是一条直线，尽管每根弹簧不一样。同时，我们也看到了一些偏离直线的点。那些就是属于 m 太小和太大的情况。注意，每一根弹簧对应的这些偏离点也不同。如果你仔细观察弹簧你还会发现，大概来说弹簧的粗细和这些偏离值好像有点联系。这个成正比的质量的范围就是这根弹簧的测量范围，称为量程。补充数据表格，$m - x$ 图

于是，基于有了标准千克之后天平就可以测量质量这个假设，我们就可以用弹簧来测量质量了。注意，这里我们之所以能够用弹簧来测量质量，是建立在 $G = mg$ 和 $F = kx$ 这两个假设之上的。是的，我们检验了，合起来的 $m \sim x$ 确实可以得到实验验证，但是，合起来的 $m \sim x$ 正确不代表 $G = mg$ 和 $F = kx$ 这两个假设都正确。更进一步，实际上，我们也没有解释为什么天平可以看作是测量质量的独立于重力的仪器。如果天平本身其实是依赖于重力的测量的，则我们在逻辑上的困难，也就是为什么 $G = mg$ 是对的，还是没有解决。将来我们会学习到，确实天平实际上依靠的是力，或者更准确地说是力矩（通常最基本的天平左右两边的力臂相同，于是就成了力相同。这个“于是”也只有将来进一步学习才会明白）。因此，就是有这个逻辑循环的问题。

这个困难逻辑上非常麻烦。你看，要是我们有力和质量的独立的定义，则我们可以检验是否 $G = mg$。可是，一方面，我们的质量只有概念上的定义，看起来其测量都依赖于力；另一方面，我们的力没有独立的定义，看起来需要用重力的大小来当做某个标准然后做一个测量形式的定义，而重力的数值又依赖于质量。你看，我们陷入了一个逻辑上的循环。

我们来试试跳出来这个逻辑循环。

第一个跳出来的方式是从根子上搞清楚质量是什么，让其有独立的不依赖于重量测量仪器的定义。我们说了，彻底说明质量是什么需要用到很多后面的知识。因此，我们下面也就一说，你也就一看，别太深究。知识都是对的，但还这些知识怎么来的，为什么是对的，我们暂时不回答。有些物体的质量，比如说气体，其实就是有多少个气体分子的一种度量。然后，测出来的结果，就是多个少个气体分子乘以每个分子的质量。于是，只要我们认为数数的问题是数学已经解决的，并且对于这个气体来说，其分子本身

是确定的，于是不管能够测量出来这个分子所包含的的质的多少也是定的。于是，质量的含义也就是单个分子所包含的质的多少，乘以多少个分子。当然，我们可能还会比较两种不同气体的质量。这个时候我们实际上还要对比不同的分子包含的某种共同的质的量。这就要深入到构成分子的原子和原子之间的作用力了。这部分知识只能留待以后再说。但是，反正原理上，就是找到各个物质之间某种共同的质，然后，我们来看这个质的量也就是质量。只要你对质量的概念大概有了这个程度的理解，那么，基本上也就是能够建立起来“质量是可以独立于重力而定义的量”的认知。于是，就一定程度上解决了这个质量依赖于重力来测量，重力和力依赖于质量来测量的逻辑循环的问题了。

由于我们现在的技术早使得我们能够到达无重力区域。如果质量的定义真的就依赖于重力，那么，也就是说，我们会发现一个很神奇的结论：在无重力区域，物体的质量也不存在了。这显然是不对的，一个物体包含的物质的多少，只要不改变这个物体内部到底包含了什么东西，不应该被改变。因此，我们也看到了，质量是必须有独立的自己的定义的。

第二个跳出来的方式是从根子上独立定义力。例如我们可以通过对物体运动的影响来定义力的大小，然后把从运动的改变定义的力用来拉物体使得物体不下落，也就是维持平衡[3]，那么，就能够沟通重力和从运动的角度来定义的力了。接着，例如仍然通过拉着物体使其保持平衡而不下落而把所有的其他力都和重力联系起来，就可以来做所有的力的测量。

当然，这里藏了个问题：为什么从运动的角度定义的力和重力的角度来定义的力可以沟通起立？这是一个深刻的问题，尤其是看起来跟重力相连的物质的量，本来从概念上就和影响运动的物质的量不完全是一个东西。

当然，如果质量和力都能够独立定义，那就更好了，$G = mg$ 是否成立就可以成为一个可以被检验的命题了，而不是用它来根据已知的其中一个量来定义另一个量。实际上，将来我们会知道物理学里面的质量和力都是有自己的定义方式的。

[3]关于平衡的情况下这个拉力和重力相等，我们以后会再来学习。这里需要用到一个我们还没有学习过的知识“受力平衡分析”或者叫做“静力学分析”。意思是，物体静止不动的时候，其受到的左右力合起来等于零。更详细的学习会放到 3.5 节。于是，如果我们已知这个物体就受到两个力，又知道了其中一个力的大小，那么另一个力的大小也就知道了。

那么，目前，我们在没有后面的知识的时候怎么解决这个逻辑循环的问题呢?

这就要靠第三个方式——自洽性。也就是，如果我们假设了 $G = mg$ 之后，再结合前面的实验结论 $m \sim x$，加上弹簧拉着物体而物体不动的时候 $F = G$[4]，我们就有了 $F \sim x$，然后我们就可以用不同的弹簧不同的工具来做成来的质量测量仪器了，发现，测量出来的结果是相一致的，那么，我们说，这个假设可以接受。也就是说，在我们不知道重力如何度量来源是什么的条件下，我们发现，如果我们把一个物体受到的重力看做和这个物体的质量成正比之后，我们可以解释大量的测量和观测结果，并且不会造成矛盾，那么，我们就暂时接受这个假设，如果这个假设往往也很简单的话。这就是物理学中简单性和自洽性的要求。

我们来看接受了这个 $G = mg$ 的假设之后，天平测量质量的原理大概是什么。插入天平和砝码图片 。如图，我们发现天平的原理，实际上是天平平衡的时候意味着天平两边的托盘上受到被测量物体和砝码的压力相同，如果压力不同，则天平偏向其中压力大的那一边。这个和我们日常生活的经验相符。这个压力从哪里来的呢，间接地来自于物体受到的重力。因此，天平实际上测量的还是物体受到的重力。或者记为质量 m 的某个数学上是单值函数的效应量 $S(m)$[5]，于是

$$S(m) = S(m_S) \Longrightarrow m = m_S. \tag{2.2}$$

于是，你发现，天平确实依赖于重力。不过，其实不完全需要用到 $G = mg$ 这个正比关系，只要 G 和 m 之间满足单值函数这个要求就可以，就可以得到当两侧 G 相同的时候 m 也相同。

一旦我们提出和接受了这个 $G = mg$ 的假设之后，我们就可以建立力的标准单位了。例如，我们可以规定，$1kg$ 的物体在地球表面收到的重力为 $1\mathscr{N}$。这样，我们就得到了力的标准单位 $\mathscr{N}$。但是，实际上，由于我们很快就会学习到的原因，力的标准单位 N，被约定为 $1kg$ 的物体在地球表面

[4]这叫做受力平衡，实际上，也需要用到后面的知识。不过，我们暂时接受当弹簧拉着物体而物体不动的时候，拉力 F 和重力 G 大小相等。后面的学习中，我们会回到这个问题

[5]将来我们会学习到，这里的 S 函数是 $S(m) = mgL$。其中，L 是天平的臂长。对于给定而且两侧相同的 L 以及满足同样要求的 g 这个函数确实是单值函数。

收到的重力为 gN。其中常数 g 经常被取值为 9.8。将来我们会知道 g 的数值依赖于我们在什么地方谈一个物体收到的重力。于是，你会发现，这个基于重力的力的标准单位的定义很不好啊，竟然依赖于具体的地点。那是不是不同地点力的标准大小定义都不一样了呢？为了解决这个问题，将来我们会从力对于运动的影响的角度来重新定义力的标准单位。目前，先凑合着用 $G = mg$ 来理解力的标准大小：质量为 $1kg$ 的物体收到的重力约定为 $9.8N$。然后，我们就可以通过跟天平是对比两个质量保证其相同的仪器一样，找一个对比两个力保证其相同的仪器，来得到其他的力的大小了。

这样，我们看起来就自洽了：在地球表面，每一个质量为 m 的物体会受到一个重力 $G = mg$；天平通过间接地感受到这个重力 G 来对比使得左右两边的质量相同，从而实现以标准质量单位来测量任何物体的质量；力的单位，暂时可以看做，依据 $G = mg$ 和标准质量单位来制定标准力的单位而得到；其他的力，只需要找到一个类似天平的可以通过对比力的大小来保证两个力相同的仪器，就可以测量其大小。至于后面的这个对比力的大小的仪器是什么，将来我们会学习到。例如，我们可以通过受力平衡和物体的静止状态的联系来实现保证两个力的大小相同。我们就暂时管这个仪器叫做力平衡仪，或者“力平”得了。

物理学家是有权利来耍这个基于“自洽性”的无赖的——我们有权利提出来（尽可能少的）一群假设只需要保证在这个假设下测量结果都能够和计算结果相符，并且从这些假设内部本身以及得到的计算结果之间没有矛盾，当然，能够从定义上讲明白然后实验检验从而不需要耍这个无赖还是尽量不耍。

实际上，对不同质量可以显示出来一个不同的可测量的反应的事物都可以来用这样的方式做成测量质量的仪器。除了通常的弹簧，例如压电陶瓷等压电器件也可以。压电器件具有按照外界压力来产生电流[6]的响应的能力。然后，我们只要测量一下响应的电流大小就可以得到压力。

我们来总结一下这一小节学到的质量和力。首先，基于生活经验，我们可以把一个物体受到的重力和这个物体的质量联系起来——质量越大受到的重力越大 $G = mg$，接着基于此把重力和质量相互定义，最后通过标准质量单位和天平来测量任何物体的质量，通过类似于天平的保证力大小相同

[6]压力是是如何被这个压电器件转化为电荷、电压、电流的原理我们暂时不解释了。

的“力平”来测量任何物体受到的力。这是最不可靠的，但是基于生活经验，非常好接受。其次，我们可以假设地球表面物体受到的重力为 $G = mg$，于是天平可以看做是通过保证两边物体受到重力相同从而保证质量相同的仪器，在约定好质量的标准单位之后，就得到了测量任何物体质量的方法，也得到了重力的标准单位，更进一步根据实验结论 $m \sim x$ 也可以用弹簧来测量物体的质量了。这是质量和重力在概念上仍然定义不清楚，但是自洽的基于操作性定义的方式。最后，我们可以从概念上分别定义质量——包含的某种完全相同的质的多少（例如同一种气体的质量谈论的就是这种气体分子多少个，不同种气体则还需要把这些气体分子还原到更加基本的单元，看看这些更加基本的单元的数量的多少），重力为相应的质量的物体受到的地球引力，然后，来检验两者是否真的具有正比关系，然后通过天平和“力平”来通过标准质量单位和标准重力单位迁移到所有的物体上。这是逻辑上最通常的方式，但是，需要用到大量你没有学习过的知识。

总而言之，我希望你能够体会到，就算最基本的量的定义和测量，在物理学中，都不是一个简单的问题，很多量的定义和测量可以基于生活经验先找一个办法来做，但是，我们仍然需要从逻辑上来梳理，而且这样的梳理可能会改变世界。例如，Einstein对于重力和质量的关系的进一步梳理，就导致了其对重力质量（习惯上称作引力质量）和运动质量（习惯上称作惯性质量）的区分，促进了其提出广义相对论 [13]。

2.2 弹簧的弹力

现在，我们已经有了重力的标准单位和测量方式，之前还顺便验证了，对于弹簧，$m \sim x$，或者说 $G \sim x$ 成立。实际上，我们就可以用这两者之一来测量弹簧上的弹力了。你看，我们可以用若干个标准重力单位的物体挂到一根弹簧上，然后记录下来弹簧相应的伸长量，就可以得到一系列对应着标准重力单位大小的力的弹簧伸长量刻度点。如果有必要，可以再对这些刻度点均匀细分。所得到的弹簧就具有了测量量程内未知重力物体的功能了。这其实就是弹簧秤。由于重力和质量之间的一一对应关系，弹簧秤也可以用来测量质量。

这就解决了一根弹簧的弹力测量的问题。类似地，可以解决素有的弹

簧的弹力测量的问题。这就有了弹力的操作性定义。

我们往往不满足于操作性定义，会追问，那么这些弹簧上的弹力怎么来的呢？为什么弹簧拉伸以后会出现一个弹力，这个弹力具有往回拉的效果，也被称为拉力呢？类似地，当压缩一根弹簧的时候，弹簧会出现另一个弹力，往外推的推力。首先，我们可以通过生活经验来感受这拉力和推力，熟悉它们接受它们，没准就忘了这个追问了。其次，更好的处理方法是问这些力是如何形成的，其来源是什么。这个问题，我们先把答案写在这里，将来再来回答：弹簧的弹力来自于电磁力。

类似地，把水杯放在桌子上，桌子和水杯也会产生一个变形，这个变形，或者更经常地物理学家称之为形变——形状的变化的意思，会导致电磁力表现为弹力，而这个弹力支撑着杯子不会穿透桌子。

我们还注意到，弹簧的弹力和形变量之间存在着正比关系 $F = kx$。这是怎么来的呢？首先这可以看做是实验结论。其次，将来我们会知道，对于任何一个存在平衡点——或者在弹簧而言就是自然伸长量的点——的问题，在平衡点附近，我们往往可以用线性近似。将来我们会学习到，在数学上，这被称为线性近似，或者叫做 Taylor 展开[7]。只要偏离平衡点的伸长量不是特别大，这个近似可以很准确。

除了从形变量 x 来得到弹力的大小，我们还可以运用一个我们将来才会学到的叫做“受力平衡分析”或者叫做“静力学分析”的知识来确定弹力的大小。我们通过一个例子来展示这样的分析怎么做。

插入以下两个例题的图

例 2.1 (桌子上木块的受力分析). *在一个水平桌面上放了一个质量为 m 的实心木块。木块相对于桌面静止不动，桌面相对于地球静止不动。请问其受到的桌面给的弹力是多少？*

按照静止物体受力平衡，我们有木块静止不动，于是其受到的所有的力合起来等于零。首先，这个木块肯定受到地球引力也就是重力，大小为 $G = mg$，竖直向下。这个木块最多了只能再受到一个弹力了。因此，其必然受到一个反方向大小相同的弹力，$F = mg$，竖直向上。

有了这个例子，我们来完成一个稍微复杂一点的例子。

---

[7]用数学语言来说，就是对于函数 $F(X)$，如果 $F(X_0) = 0$，我们在这个平衡点附近可以把函数近似表示为 $F(X + x) = F(X_0) + kx = kx$，其中 $k = \frac{dF}{dX}|_{X_0}$。

例 2.2 (桌子上两个木块的受力分析). 在一个水平桌面上叠放放了一个质量为 m_1 的实心木块和一个质量为 m_2 的实心木块，m_1 在 m_2 的上方。两个木块相对于桌面静止不动，桌面相对于地球静止不动。请问 m_1 和 m_2 受到的弹力分别是多少？

重复前一问的分析我们得到 m_1 受到的力包含了重力和弹力，弹力只能来自于 m_2（形变只能在 m_1 和 m_2 之间产生，不能在 m_1 和桌面之间产生，它们不直接接触），大小都是 m_1g。分别记做 $G_1 = m_1g$，$N_1^2 = m_1g$（将来在高中阶段，我们会把方向也包含进力的记号，写成 $N_1^2 = -m_1g$，表示其方向和 $G_1 = m_1g$ 相反）。

接着，同样的形变，m_2 也感受到了，因此，m_2 受到的力包含重力 $G_2 = m_2g$，只能来自于 m_1 的弹力 $N_2^1 = m_1g$[8]。

这样，第二个物体受到的竖直向下的力有 G_2 和 N_2^1，只有再受到一个竖直向上的力，才能实现合力为零，因此，其受到桌子表面给的弹力为 $N_2 = (m_1 + m_2)\,g$。

通过这两个例子，首先我们学会了弹力的计算分析。我们还发现，其实，同一个木块的情形也可以看做是那个木块可以分成多个堆叠起来的小木块的情形，而这样一看，我们就发现，越往下的部分其受到的竖直向上的弹力越大，其感受到的压力也就越大。你看这就解释了为什么叠罗汉的时候，底下的人往往需要比较强壮。

2.3 其它的力

除了重力和弹力，我们还经常见到摩擦力、风力、水力、空气阻力、电力（例如通电使得电动机转起来，从而驱动车跑）等等。其中摩擦力指的是，两个物体之间的粗糙的接触表面会阻碍这两个物体的表面产生相对运动。这个我们都很熟悉。例如，我们把手掌在桌面上推动，就能明显地感受到这个阻碍我们的手掌运动的力。我们想把手掌往前推就会感受到一个向后的力，我们饿想把手掌往回撤就会感受到一个向前的力。而且，在我们真

[8] 将来，我们会把相互感受到的形变相同所以感受到的力大小也相同这一条拓展为一个叫做 Newton 第三定律的东西——A 物体给 B 物体一个作用力的同时，必然受到 B 物体给 A 物体的反作用力，两个力大小相等方向相反。

的产生看得到的手掌和桌面之间的相对运动之前，我们就能感觉到这个力。也就是说，摩擦力阻碍的不仅仅是真的运动，连运动的趋势它一起阻碍。那么，如何在运动产生恒之前判断运动的趋势呢？设想一下如何没有摩擦力会怎样，运动会在哪个方向上，那么摩擦力就是跟你在这个假设无摩擦的情况下的运动方向反过来。

人们经常把摩擦力分成滑动摩擦和滚动摩擦。插入滑动摩擦和滚动摩擦图 。滑动摩擦通常指的是两个相对运动或者具有相对运动趋势的平面之间的摩擦力。例如当我们把木块放到桌面上滑动时候木块受到的摩擦力。滚动摩擦往往指的是，具有相对运动或者相对运动趋势的一个圆形表面和一个平面之间的摩擦力。例如当我们在桌子上滚动一个轮子，其感受到的摩擦力。要注意，如果我们把轮子做的非常有棱角，就好像要滚一个四边形或者六边形，这个时候，我们感受到的力很大程度上其实不是摩擦力。这个情况的具体分析等我们以后学了更多物理知识再说。

目前，我们主要关注滑动摩擦。对于活动摩擦，如果我们可以把表面的粗糙水平不断地降低，也就是使得表面越来越光滑，可以想见，这个摩擦力就会越来越小。同时，接触面上感受到的压力越大显然摩擦力也就越大。合起来也就是，

$$f = \mu N. \tag{2.3}$$

其中，μ 就是代表光滑程度的摩擦系数，N 就是接触界面感受到的弹力。我们用下面的实验来检验这个基于生活经验的假设。这个检验的过程，和之前测量和计算弹力一样，需要用到一个我们还没有学习过的知识“受力平衡分析”或者叫做“静力学分析”。我们用静力学分析来测量滑动摩擦力然后来检验上面这个公式 (2.3)。

实验 2.2 (摩擦力的测量和摩擦力公式的检验). *在桌面、玻璃表面、冰面、气垫导轨上各自完成下面的实验，测量出来其中的滑动摩擦力，然后分析摩擦力 f 和光滑程度 μ、界面感受到的压力 N 之间的关系。把做好了一个用于和弹簧相连的钩子的木块（实际上，木块也可以换成表面光滑程度不同的其他物块）放到实验的表面上，用一个弹簧测力计施加给物块大小合适的力来拉动这个木块，使得这个木块马上就要产生运动，也就是再稍微多用点力就木块就会动起来的那个最大的可能的力。在这个木块上方放上一个重物，多放几个不同质量的，重新完成实验，记录摩擦力。*

补充这个实验的装置图，结果表格，分析用数据图

在生活中，其实我们还见过更多的力，例如电通过电动机使得电风扇转起来的力，太阳的照射使得太阳能玩具动起来的力，等等。将来，我们会学习到所有的这些力，通过做实验做测量或者做理论分析计算的方式。运动、力和能量（粗糙地说，就是蕴藏了一些可以用来完成某些任务的力的这种潜在力量）是物理学的重要研究问题。

2.4 推荐阅读材料

2.5 作业

2.6 本章小结

在这一章中，首先我们学习了质量和重力的定义。但是，由于我们生活中往往通过测量重力来测量质量，以及由于我们目前不能通过力对运动的影响来定义力我们重力的单位实际上是依托于质量来定义的，我们这里质量和重力两个概念是完全混在一起的。我们稍微地尝试了一下把这两个概念一定程度上分开，而且也交代了，将来我们会进一步把两者分开。然后，我们学到了弹力、摩擦力的定义、测量和计算。在计算上，实际上我们用到了受力平衡分析这个将来在 3.5 节才会学到的知识。合起来，我们就有了重力、弹力、摩擦力这三个初中阶段最常用到的力的定义、测量和计算方面的知识。这就为后面的学习做好了铺垫。但是，要注意，在这一章中，我们特意避开了回答“力是什么”、“力的标准单位如何定义”等问题。这些问题只能留到以后再来解决了。反正，目前，我们至少可以识别、测量和计算出来重力、弹力、摩擦力这三种具体的力了。

顺便，你可能已经初步发现，物理学家创造知识的方法，也是你理解物理知识的方法，就是做实验、测量，深入思考，做计算推理，以及问看起来很平庸的完全就是生活经验层面的问题。物理学和物理学知识没有任何神奇的地方，不过就是上面这几个典型研究方法的结果而已。

然后，如果现有数学结构还不够我们用来解决我们的问题，则我们去创造数学结构。

第三章　力和运动

3.1　从“力是维持运动的原因”到“力是改变速度的原因”

生活经验，“力是维持速度（运动）的原因”。

实验启发，冰上和气垫上的运动，持续拉力实验，冰上气垫上推物块实验，伽利略的滑块试验和理想实验，得到：没有力的时候速度仍然不等于零仍然有运动，进而猜测力是改变速度（运动）的原因。

最简单的速度变化的情形，$v = at$，速度的变化率为常数 a。这时候，力是改变速度（运动）的原因，表述为 $a = g(F)$。其中，最简单的函数情形是线性函数，或者也可以先受实验启发一下，画个 $a - F$ 图看看。

一旦真的就是 $a \propto F$，则同时解释了上面的生活经验直觉——在某些场合“力是维持速度（运动）的原因”，和实验启发的直觉——在另外的场合“力是改变速度（运动）的原因”：其关键是，前者的场合中有另外的力（例如摩擦力）使得速度很快下降到零；后者的场合中，摩擦力已经被控制的很小很小，所谓的没有力的作用基本上真的就是没有[1]。

[1]实际上，冰上和气垫上运动的物体，尽管水平方向基本除了已经很小很小的摩擦力确实不受其它力的做用了，但是还受到竖直方向的力的作用。这个以后再说。

3.2 从自由落体运动到匀加速直线运动的 $F = ma$

实验启发，分析归纳，实验检验

自由落体运动：只受重力作用 $G = mg$，暂时假设 g 是常数（将来我们会知道，就算在地球表面也不是各个地方都相同，离地面的距离也会对 g 有影响）。考虑两个质量不同（记作 m^1 和 m^2）的铁块的自由落体运动。我们通过观察发现，从任何一个地方（两者最好从同一个地方，或者，至少离地面距离相同的两个点）松手，这两个铁块的落地几乎相同。这一点可以通过做测量来验证。在我们能做到的精度范围内，我们需要的范围内，两者的落地时间完全一致。

其实可以进一步，从同一个地方开始下落，从松开手开始计时的任何同一个时间点去做两者的测量，两者离地面的高度完全一致。甚至，可以再进一步，开始高度不相同也没关系，只要在自由落体还在进行的过程中去测量，从松开手开始计时的任何同一个时间点去做两者的测量，两者离地面的高度完全一致。

补充反映第一点和第二点的实验。尽量做到可以用手机自己照照片、作计算和写报告。打点计时器，手机配上尺子 + 另外一个用来当秒表手机来拍照计算（秘诀是，一定要保证续连拍照的时间间隔相同，并且拍照不抖。最好不要使用“手机物理工坊”这种高级工具，尽量直接用最简单最落后最直观的手机功能）。先通过对比轨迹得到再一点和第二点。再算出来第一个单位时间的平均速度，第二个单位时间的平均速度，计算两者的速度差得到加速度；选择其它相邻的单位时间，重复以上计算，得到加速度。拍一组照片放这里当习题。

需要补充对于匀加速直线运动，平均速度等于中间时刻的速度（梯形面积公式、梯形中线高度），才能算出来加速度。

用数学的语言来说，这里我们有 $m^1 \neq m^2$，当 $y^1(0) = y^2(0)$ 的时候，落地时间 $t^1_f = t^2_f = t_f$，$y^1(t) = y^2(t)$（由于自由落体运动通常在竖直——起点到地球中心的方向，而不是和可以任意改变的地球表面垂直的方向——方向上发生，通常我们不用代表水平方向或者地球表面方向距离的 x 而用 y），对于任意的 $0 < t < t_f$；更进一步，对于同一个物体，甚至当两次自由落体运动不从同一个高度开始的时候，$y^1_I(0) \neq y^1_{II}(0)$ 的时候，$y^1_I(t) - y^1_I(0) = y^1_{II}(t) - y^1_{II}(0)$，对于任意的 $0 < t < \min\{t_{I,f}, t_{II,f}\}$。

第二条表明，从不同的高度为起点下落得到的 $y - t$ 曲线只需要做一下 y 方向的平移，就可以重合在一起。注意，我们已经知道，y 方向的起点的平移不改变 $v_y - t$，因而也不改变 $a_y - t$。

第一条表示，不同的 m 对应着同样的 $y - t$ 曲线，因此，也就是相同的 $v_y - t$ 曲线，相同的 $a_y - t$ 曲线。

注意，前面我们已经猜测，只受地球重力作用的物体，受到的力和质量的关系是 $G = mg$。现在，我们看到了，在只受这个 $G = mg$ 的力的作用的情况下，两个质量不同的物体 $m_1 \neq m_2$，做完全相同的运动，$y^1(t) = y^2(t)$，$v_y^1(t) = v_y^2(t)$，$a_y^1(t) = a_y^2(t)$。

我们还可以测量出来，这个自由落体运动的 $v_y(t)$ 大概是均匀增加的，也就是 $v_y(t) = a_y t$。这个时候，我们知道了整个运动过程的加速度是同一个数值，也就是 $a_y(t) = a$。

现在，我们要开始人类文明历史上取大的猜测和跳跃了：我们说，如果 $a = \frac{F}{m}$，则上面的“自由落体运动和质量无关”的结果非常容易理解。你看，这里唯一的力是 $G = mg$，如果 $a = \frac{F}{m}$，那么加速度就有 $a = \frac{F}{m} = \frac{mg}{m} = g$，跟质量无关。

注意，这是非逻辑严密的，这是猜测和跳跃，尽管受了实验现象的启发。第一，重力公式中的质量和运动公式中的质量不一定就有关系，也就是 $G = mg$ 里面的 m 和 $a = \frac{F}{m}$ 完全可以是两个东西，我们把“重力质量”和“运动质量”放在一起是一个跳跃。第二，完全有可能这个“自由落体运动和质量无关”的结果可以用其它方式来解决，而不是依靠 $a = \frac{F}{m}$，尽管这样做很简单；第三，完全有可能这个来自于自由落体运动的猜测，$a = \frac{F}{m}$，仅仅适用于重力作用下的自由落体运动。

那么，我们怎么办呢？至少第三点比较简单，我们用其它力——尤其是不满足 $F = km$ 的力——来试试，是否仍然有这个效果。怎么比较呢？我们找一个给定的 F 的形式，例如是一个常数（怎么确定这个时候的 F 是个常数呢？那时另一个问题。假设我们已经有其它确定和测量力的大小的方式，而不需要依靠重力和运动），那么，按照我们的 $a = \frac{F}{m}$，我们发现 a 也是一个常数，但是，是一个依赖于 m 的常数。这个时候，我们算出来 $v(t)$ 和 $x(t)$。最后，我们做测量来检验任意时刻 t^* 观测到的 v^* 和 x^* 是否正好就是 $v(t^*)$ 和 $x(t^*)$，在测量误差允许的范围内。

第一个和第二个问题比较麻烦，我们先心里有数，暂时不在这里展开。

我们再回到第二条，从不同的高度为起点下落得到的 $y-t$ 曲线只需要做一下 y 方向的平移，就可以重合在一起。这表示，任何一个点上的加速度都相同。结合 $F=ma$，这表示对于同一个物体，很大程度上，在各个点所受的重力也相同。当然，在我们假设地球表面 $G=mg$，g 是一个常数的条件下，这一点很平庸。但是，反过来，我们会发现，如果有一天，这一条不成立，则我们可能需要修改的是 g 是一个依赖于具体位置的常数，而不是去修改 $G=mg$。

再进一步，就算将来我们发现，g 其实不是一个常数，而是一个依赖于位置 $\vec{r}=(x,y,z)$ 的函数，则有可能 $G=mg$ 和 $a=\frac{F}{m}$ 仍然成立，并且第一条也仍然成立[2]，仅仅第二条不成立。

在这里，我们注意到，我们的猜测和跳跃是从实现现象开始的，受实验现象的启发的，用数学语言来表达的，后面接受更广泛的实验检验的。这就是科学研究。

在这里，我们还注意到，任何一个不同性质的对象出现相同行为的实验结果，都是意义非凡的。我们对于为什么这样的不同的对象竟然出现了相同的行为的追问，往往会导致深刻的规律的发现。

这就是自由落体运动及其研究给我们的关于一般性的科学研究方法，以及追求普适性以及追问普适现象背后的原因这个科学思维方式，这两个方面给我们的启发。

科学的学习，就是要从科学研究的具体案例之中体会到这些科学思维、科学研究方法等高层知识。

3.3 $a=\frac{F}{m}$ 的检验

F 得先有定义，因此，总是针对已经有定义和测量手段的力。做各种给定力的情况下的实验，数据分析，检验 $a=\frac{F}{m}$。

一个比较绕的但是容易实现的给定 F 的实验可以基于重力这样来设

[2]这个时候，我们有 $a=\frac{mg}{m}=g(x,y,z)$，它不再是一个不依赖于位置和时间的常数。这个方程如何求解我们现在不会，将来会用到一个叫做“微积分”和“微分方程”的东西来求解。顺便，微积分和微分方程就是Newton为这个求解运动方程的目的而发明的。

计：两个小球 M 和 m 以绳子相连，绳子在靠近重物 M 的一端挂在一个相当光滑的水平放置的杆上，托住。例如，可以放在一个门把手上。如果不够光滑，可以考虑个给这个杆上套一个可以滚动的更加光滑的外壳，或者给绳子打上蜡，或者用其它办法使得绳子更加光滑。然后，我们不再托住这个绳子的重物一端，让其落下。

这个时候，我们说，尽管我们还不知道这个时候轻物 m 受到的拉力 T 是多大，但是，肯定是一个常数，并且根据 Newton 第三定律，这个拉力正好也就是重物 M 受到的绳子的反向拉力的大小。

于是，如果 $F = ma$ 正确，则我们有

$$T - mg = ma, \tag{3.1}$$

$$Mg - T = Ma. \tag{3.2}$$

上面有两个未知数 T 和 a，分别求解出来得到

$$T = \frac{2Mm}{M+m}g, \tag{3.3}$$

$$a = \frac{M-m}{M+m}g. \tag{3.4}$$

其中，第一个等式的测量和检验会稍微麻烦一点，将来再说。但是，第二个等式的检验很简单。我们只需要还是通过手机拍照，或者运用打点计时器就可以算出来加速度，然后和计算结果比较。

下面是比较的结果。

那这个实验以及比较的结果说明了什么呢？说明了 $F = ma$ 不仅仅适用于只有重力作用的情况，当有一个恒定的重力和恒定的拉力，或者说两者合起来是一个恒定的合力（无论对于单独的重物 M 还是单独的轻物 m 来说）的时候，$F = ma$ 仍然成立。

下面是一个更加复杂的恒定拉力的实验。

那么，是不是只有恒定拉力的情况下 $F = ma$ 才是正确的呢？这就需要更复杂的实验和更复杂的计算了。由于我们还没有掌握随时间或者空间改变的力的作用下运动的计算所需要的数学，我们就暂时不在这里继续展开了。将来，等到了大学，或者高中，掌握了微积分以后，我们再回到这个问题。

3.4 曾经的所谓的"惯性"

从 $a=\frac{F}{m}$ 我们发现，对于给定大小的力 F，加速度的大小和 m 成反比，也就是 m 越大，a 越小。a 越小则给定时间里面积累出来一定的速度 v 越小，相应的积累出来的位移 x 也就越小。这样就产生了一个现象：质量越大的物体，看起来对运动的抵抗性就更大，或者说，在给定的力的条件下运动效果更小。另外，如果力作用的时间越小，则累积的速度越小，累积的位移也越小。因此，如果一个物体在给定的力的作用下，质量越大，作用时间越短，则运动效果越小。也就是说，就算有力的作用，当质量比较大和作用时间比较短的时候，运动效果很小，就好像没有产生什么运动从而保持了这个物体原来的运动状态一样。

这个在历史上，由于当时 $a=\frac{F}{m}$ 还没有被认识到，被人们称为"惯性"——一个在给定作用力 F 作用下的物体，在质量比较大，作用时间比较短的条件下，运动状态的改变，也就是初始和末尾的速度之差以及初始和末尾的位置之差，很小。就好像这个物体具有倾向于保持其过去的运动状态（习惯状态）的性质一样。

但是，现在，我们知道了 $a=\frac{F}{m}$，我们就知道了，惯性说的不过就是加速度 a 和质量 m 称反比，以及速度来自于加速度的累积效果，位移来自于速度的累积效果的意思。前者清楚地被表达在 $a=\frac{F}{m}$ 之中，后者其实被描述在 $a-t$、$v-t$、$x-t$ 曲线三者的关系之中：$a-t$ 的曲线下面积（也就是 a 对时间的累积）就是 $v-t$，$v-t$ 的曲线下面积（也就是 v 对时间的累积）就是 $x-t$；以及反过来，$x-t$ 的曲线的斜率（也就是单位时间内的 x 变化）就是 $v-t$，$v-t$ 的曲线的斜率（也就是单位时间内的 v 变化）就是 $a-t$。这就是累积量和变化率的关系。

因此，惯性，从概念上，就是 $a=\frac{F}{m}$ 以及累积量和变化率的关系——将来我们会把这个关系称作（对时间的）积分和微分的关系。

好了，尽管我们从根本上就淘汰了"惯性"的概念，但是，回到当时的历史条件来感受一下惯性的威力看看惯性现象还是有意义的。也正是从这个惯性现象的角度，我们仍然允许使用"惯性"这个历史名词。

惯性现象演示。一个飞驰的汽车拉开桌布，桌子上的餐具基本不动——作用时间短。冰上相撞的两个人，体重大的基本沿着原来的方向和速度前进——质量大。找一些惯性现象的工程应用，照片。尽量做到可以用手机自

己照照片和写报告。

最后再强调一遍，物体没有惯性，但是可以展示出来惯性现象，也就是在物体质量比较大，力作用的时间比较短的条件下，物体的运动状态——包含速度和位置——的改变很小，其根源是 $a=\frac{F}{m}$ 以及加速度和速度、速度和位移之间的累积量和变化率的关系。

Newton 第一定律上哪里去了？传统物理教材上，我们有一个 Newton 第一定律——物体在不受力的时候保持原来的运动状态（指的是速度）。如果我们不管具体来说不受力是什么意思，单纯从字面上说就是 $F=0$，那么，按照 Newton 第二定律，对于质量不为零的物体，自然我们有 $a=\frac{F}{m}=\frac{0}{m}=0$，也就是加速度为零。于是，速度保持原来的状态。因此，从逻辑上，Newton 第一定律是完全可以从 Newton 第二定律得到的。

当然，从历史发展的角度，Newton 第一定律比 Newton 第二定律先提出来，因此，其有存在的历史价值。但是，从学科知识结构本身的角度，Newton 第一定律是完全没有独立于 Newton 第二定律存在的意义的。

3.5 静力学分析

当合外力为零的时候 $F=0$，按照 $F=ma$，我们有 $a=0$。也就是，合外力为零则物体静止或者做匀速直线运动。同时，反过来也成立，也就是当物体静止或者做匀速直线运动的时候其受到的合外力为零。利用这个条件，我们可以来计算和测量物体静止的时候的受力。合外力为零也被称为受力平衡。关于受力平衡的研究被称为静力学，相应的计算过程叫做静力学分析。在生活中，桥梁、房屋等建筑都需要做静力学分析，甚至在设计图纸的阶段。这样才能更好地了解每个铰合的部位和承重的组件用什么材料。

在前面其实我们已经悄悄地用过这个结论来测量摩擦力和其他的力。现在，我们来多做几个例子。

补充几个静力学分析的例子

3.6 从力和运动来看物理学

生活经验不可靠。看起来可以解释一部分现象的猜想也不可靠。那什么可靠呢?

能够尽量解释更多现象，或者对现象划分出类比以后，要求可以解释同一类现象中的所有具体现象，但是类又是什么?

科学方法：从某个现象出发，做观测或/和实验，收集数据，分析数据，提出概念模型和数学模型，求解以后可以和这个现象相符。接着，和“这一类”现象相符。然后，最好和先有的理论，或者其它现象的模型能够相互统一，融合为一个更系统的模型。

有的时候，还可以从一系列实验中往前推理，猜测出来一些极限的情况，尽管这个极限情况不一定能够直接做实验来检验。我们把这样的推理，或者说归纳和推广出来的结果，也纳入后续建立物理对象的数学模型的考量之中。

更进一步，可以提炼出来基本假设，对基本假设做独立检验，或者考察基本假设的合理性。都通过，则，暂时接受，企图迁移到更多现象。

因此，物理学尽可能地追求用更少的模型，包含概念模型和数学模型，来解释更多的现象，物理学的概念模型和数学模型受实验以及理想实验结果的启发，接受实验结果的检验。物理学一旦有了概念模型和数学模型之后，要靠数学语言来计算推理。

3.7 抽象的力

我们先有了具有的可定义和可测量的力，然后，把这样的定义和测量了的力 F 用来作用在物体上然后和相应的 ma 做比较，猜测和检验了 $F = ma$。这个逻辑完全没有问题。但是，这样来讨论力，有一个缺陷：我们没有一个统一的力是什么的概念，我们只有具体系统里面表现出来的力。例如，重力就是在地球上的有质量的物体才能感受到的竖直方向的由地球发出给物体的力，弹簧的弹力是弹簧产生形变以后企图恢复到形变之间的状态而产生的力。我们还是希望既有具体的力的定义，又有一般的抽象的统一的力的定义。然而，在目前这个阶段，一旦我们脱离开实现定义和测量好的具

体的力，来谈什么是力，力的一个统一的抽象的概念，则，就往往就会有问题了。将来，我们会用基于系统的能量函数的方式来定义力[3]。

你说，是不是可以尝试把力定义为对运动状态的改变，也就是通过 $F = ma$ 来定义力？问题是，$F = ma$ 在我们目前的体系中算是一个定律。定律，从概念上来说，不能是定义。一个定律或者定理中的所有的量都是事先已经独立定义好的。然后，这些定义好的量之间存在某个额外的不是对定义的重复的关系，才构成定律和定理。因此，如果通过 $F = ma$ 来定义力，则 $F = ma$ 就不能再算定律了。

于是，为了维持 $F = ma$ 的定律的地位，我们暂时只好接受只有每一种每一个力的具体的定义，而没有抽象的力的定义，直到将来我们用基于系统的能量函数的方式来定义力。

当然，另一种方式就是抛弃把 $F = ma$ 看作物理定律，直接看作是对抽象的力的定义。这样做，逻辑上也是没问题的，不过，我们就需要给力学找一个新的基本定律——例如动量守恒。漆安慎和杜婵英的《力学》就是这样来处理的。

但是，同一个东西，在一个理论框架里面，是不能既当作定义又当作命题——定理或者定律——的。或者说，一个定义是不需要证明的，在这个这样定义的理论框架中也是必然正确的，因此，必然就是一个真命题，因此，是平庸的命题，永远不需要去讨论其正确性的命题，和定义同义反复的命题，不具有独立存在的意义的命题，没有必要被提出来当作命题的命题。真正的知识，永远是对于一个原则上既可能不成立也可能成立的命题，得到了其成立或者不成立的结果之一。讨论一个本来就永远成立的命题，或者一个永远不成立的命题，丝毫没有意义。因此，对于平庸命题的讨论，或者说根本不需要讨论，不会增加知识。

---

[3]具体来说，等到大学阶段的物理学，我们就会先把一个系统的能量函数写成其内部变量的一个函数，例如拉格朗日量 $L = L(x, \dot{x})$，或者哈密顿量 $H = H(x, p)$，或者势能函数 $V = V(x)$，然后把力看作是这些函数的导出量。例如，$F = -\frac{d}{dx}V$ 或者近似地写作 $\bar{F} = -\frac{\Delta V}{\Delta x} = -\frac{V(x_2)-V(x_1)}{x_2-x_1}$，和平均速度的定义类似。然后，根据之前能量函数成功描述系统行为的经验，我们就会得到一个从物理系统到能量函数的一个配方，也就是大概知道了"看到什么样的系统写下来什么样的能量函数"。于是，也就相当于知道了这个系统相关的力。至于这个能量函数是否正确呢，看看算出来的结果和关于这个系统的行为的实验是否相符。如果相符就进入经验库，不相符就调整能量函数的形式。

因此，反过来，一个非平庸的命题，则一定需要建立在两个（原则上也可以两个以上）内涵和外延已经清楚的概念——可以是定义也可以是定理定律——之间。

3.8　推荐阅读材料

3.9　作业

3.10　本章小结

第四章　参考系和坐标系

"If things do not turn out as we wish, we should wish for them as they turn out."

–

4.1　相对运动和参考系

在地球上，有两辆车在相向而行，各自做匀速运动。问，在第一辆车看来，第二辆车到它的距离的变化规律如何用数学描述，如果计算一下平均速度和瞬时速度，会得到多少？伽利略变换，同时的绝对性，位置坐标的可加性。

例 4.1 (相对运动问题的两种求解方式). 一条笔直的马路连着相距 $L = 40km$ 的 A, B 两点。A, B 点上分别有一辆汽车，从早上八点开始，以 $v = 40km/h$ 的速度向着对方行使。请问，两者什么时候相遇。

我们先来试试以 A 点当作坐标原点（这时候地球上的 A 点是参考系），从 A 指向 B 当作正方向，建立坐标系。则，从 A 点出发的汽车（记作汽车 A）的位置可以表示为

$$x^A = vt, t \in \left[0h, \frac{L}{v} = \frac{40km}{40km/h} = 1h\right], \tag{4.1}$$

从 B 点出发的汽车（记作汽车 B）的位置可以表示为

$$x^B = L - vt, t \in [0, 1]\, h. \tag{4.2}$$

两者相遇就是，

$$x^A = x^B \Longrightarrow vt = L - vt \Longrightarrow t = \frac{L}{2v} = 0.5h. \tag{4.3}$$

如果我们这时候计算一下，从 A 车看来 B 车的速度，那么，我们就需要先计算 A 车看来 B 车的位置，也就是

$$x^{AB} = x^B - x^A = L - 2vt. \tag{4.4}$$

我们发现这是一条直线，斜率为 $-2v$，因此，我们得到从 A 车看来 B 车的速度正好就是这个斜率

$$v^{AB} = -2v = -v - v = v^B - v^A. \tag{4.5}$$

我们发现这个速度正好就是 $v^{AB} = v^B - v^A$。如果相对运动速度都可以这样计算，那么，我们以后就可以倒过来算了：先算出来相对运动速度，然后，有一个初始的相对位置，有一个末尾的相对位置，计算两个相对位置的差，除以相对速度，就得到相遇时间。更一般地，也就是，我们转换一下坐标系——在这里是，从把地球上的 A 点当做坐标原点（这时候参考系是地球上的 A 点），改成把 A 车当作坐标原点（这时候参考系是 A 车），在新的坐标系里面写出来 $x(t)$（或者 $v(t)$，$a(t)$），则问题就解决了。

现在，我们来试试以 A 车当作坐标原点（这时候地球上的行进着的 A 车是参考系，但是，当作参考系的时候，我们把这个 A 车看作不动，也就是所有的时间、位置和质量以 A 车为基准做测量），从 A 车指向 B 车的方向当作正方向，建立坐标系。则，从 A 点出发的汽车（记作汽车 A）的位置可以表示为

$$x^A = 0. \tag{4.6}$$

从 B 点出发的汽车（记作汽车 B）的位置可以表示为

$$x^B = L - 2vt, t \in [0, 1]\, h. \tag{4.7}$$

注意，这里我们用了 $v^{AB} = v^B - v^A$。两者相遇就是，

$$x^A = x^B \Longrightarrow 0 = L - 2vt \Longrightarrow t = \frac{L}{2v} = 0.5h. \tag{4.8}$$

答案完全一致。

通过这个例子，我们发现，看起来好像 $v^{AB} = v^B - v^A$ 是对的，并且变换坐标系和参考系不改变我们对物理问题的回答。那真的是这样吗？

对于第一个问题，$v^{AB} = v^B - v^A$，其实我们可以做如下的一般证明。注意其中用到的条件。在同一直线上，任何两个匀速运动的物体的位置都可以表达为

$$x^A = x_0^A + v^A t, x^B = x_0^B + v^B t, \tag{4.9}$$

计算两者的位置的差，也就是把其中的 A 当作坐标原点和参考系，则

$$\tilde{x}^A = 0, \tilde{x}^B = x^B - x^A = \left(x_0^B - x_0^A\right) + \left(v^B - v^B\right) t, \tag{4.10}$$

于是，其斜率也就是在 A 看来的 B 的速度，也就是相对速度，为

$$\tilde{v}^B = v^B - v^A \triangleq v^{AB}. \tag{4.11}$$

注意，在这里，我们用到了三个意义上的时间，并且把它们看作相同：从地球上 A 点看来的 A 车的时间，从地球上 A 点看来的 B 车的时间，从 A 车看来的 B 车的时间。如果这三个时间不完全相同，则上面的计算是不对的。将来，当我们学习到电磁波和相对论的时候，我们会回到这个问题。

对于第二个问题，变换坐标系和参考系不改变我们对物理问题的回答，这是一个信念。当然，将来我们会对什么样的坐标变换和参考系变换不改变我们看到的物理规律有一个更好的回答和限定。但是，基本上，我们在研究物理学的时候追求，在尽可能地宽泛的坐标变换和参考系变换下，看到的物理都不变。

惯性参考系。非惯性参考系（突然加速的车，里面的人和小球）。

惯性参考系其实是一对具有如下关系的参考系：在参考系 O_1 看来，当作新的参考系的 O_2 在做速度为 v_{12} 的匀速直线运动。这个时候，但我们在两个参考系下来描述做匀速直线运动的物体 A 的运动的时候，在我们假设 O_1 和 O_2 的时间可以用同样的起点和同样的速度流逝（或者说，同一个周期的周期性现象）的仪器来测量的时候，我们有

$$\tilde{v}_2^A = v_1^A - v_{12}. \tag{4.12}$$

这个可以通过以下两个等式得到

$$x_2^A = x_1^A - O_{12}, \tag{4.13}$$

$$t_2 = t_1. \tag{4.14}$$

具体的证明过程和前面的 A, B 两个物体在做相对于地球的运动的计算过程基本相同。留作作业。

习题 4.1 (伽利略变换). 证明，对于在 O_1 下看来做匀速直线运动的物体 A，在 O_2 下看来，其仍然做匀速直线运动的。其速度具有公式 (4.12) 的关系。其中，O_2 本身在 O_1 坐标系下看来，在做速度为 v_{12} 的匀速直线运动。

将来，到大学有了微积分的工具，我们可以证明在这个条件下，对于做更一般地不一定是匀速直线运动的物体 A，公式 (4.12) 仍然正确。

4.2 对绝对惯性系的需求 *

有了惯性系和非惯性系的概念之后，马上会产生另一个问题，对于我们采用的一个具体的参考系，我们如何知道这个参考系是惯性系还是非惯性系呢？由于在非惯性系下，我们会看到一些和惯性系不同的“力”，自然，相应地加速度也会不一样。如果我们不能肯定我们所用的是一个惯性系还是非惯性系，我们怎么知道我们看到的物理世界是真正的物理世界，而不是由于用了非惯性系而看到的物理世界的“像”呢？

解决这个问题有两条思路。第一条，找到一个绝对惯性系，然后，把其它所用的各个参考系都和这个惯性系来比较一下，来判断所用的参考系是否就是惯性系。第二条，不去寻找任何一个绝对可以称为惯性系的参考系，对于任何一个集合的参考系，我们两两取出来做对比，建立等价关系，按照这个等价关系来构建分类，就会得到这个集合下面的参考系的一个分类体系。在每一个类别的参考系之内，我们说，在伽利略变换的条件下，物理一致。类别之间的比较我们先不讨论。

具体来说，两两比较和等价类的构建过程如下：取所有参考系中的编号为 i, j 的两个参考系，如果 j 在 i 看来符合匀速直线运动，则认为 i 和 j 等价，属于同一类。把属于同一类的参考系都放在一起，不同类的不放在一起。我们就会得到一个类别之间没有重复个体的，并且每一个参考系都属于唯一的一类的一个分类体系。

我们可以证明，如果 j 在 i 看来也符合匀速直线运动，i 在 j 看来也符合匀速直线运动。也就是说，如果 i 认为 j 是同一类的，则 j 认为 i 是同一类的。这在数学上是等价关系的对称性。同时，我们还可以证明，如果 j

在 i 看来也符合匀速直线运动，k 在 j 看来也符合匀速直线运动，则 k 在 i 看来也符合匀速直线运动。也就是说，如果 i 认为 j 是同一类的，j 认为 k 是同一类的，则 i 认为 k 是同一类的。这在数学上是等价关系的传递性。再加上，等价关系的自反性——也就是 i 在 i 自己看来也符合匀速直线运动，也就是 i 认为 i 是同一类的，我们就得到了完成的等价关系。关于等价关系可以用于建立一个分类体系的数学证明，见相应的高等代数类的数学书籍。不过，在我们这里，只需要针对惯性系能够具体理解这个等价性，也就是"相互看来都是惯性系"就可以了。

对于特别有好奇心和批判性思维的读者，我们来试试证明任何一个参考系必定属于某一个类别，但是不可能同时属于两个完全不同的类别。首先，由于有自反性，也就是自己至少和自己等价，因此，每一个参考系至少可以单独成类。于是，剩下的问题，其实就是把那些这样的自己成类的初始类别合在一起构成最终类别。我们来证明下一条：不可能有一个参考系属于两个不同的类别。

例 4.2 (同一个元素不能属于等价类体系中的两各类). *在一个基于满足元素之间的自反性、对称性和传递性的关系的基础上构成的等价类分类体系中，不可能有一个元素属于两个不同的类别。*

证明：假设有一个元素 l 属于两个不同的类 C_1, C_2，也就是 $l \in C_1, l \in C_2$。我们说，C_1 和 C_2 一定有不同的元素。否则，如果 C_1 和 C_2 完全具有相同的个体，则它们两个类其实是同一个类。我们假设 $c \in C_1, c \notin C_2$。由于 $c \in C_1$ 并且 $l \in C_1$，所以，根据放入同一类的条件，c 和 l 是等价的。取任意 $d \in C_2$，由于 $l \in C_2$，则根据放入同一类的条件，d 和 l 是等价的。再根据等价性的传递性，c 和 C_2 中的任意一个 d 都是等价的。于是，$c \in C_2$。矛盾。因此，l 不可能同时属于两个不同的类。

有了这个等价性和等价类又如何解决对绝对惯性系的需求的问题呢？我们说，我们放弃对某个具体参考系是否属于惯性系的判断，转而保证，只要是相互认为是等价的参考系内部，观察到的物理规律都相同（更准确地说是协变）。这样，尽管我们没有了一个绝对标准，但是，我们还是能够保证只要在等价类之类做参考系变换，保证我们观察到的物理规律都相同。这就够了。也就是说，通过判断两个参考系是否属于同一个等价类，以及保证同一个等价类之内观察到的物理规律都相同，我们就不再需要一个绝对惯

性系了。

将来，我们甚至可以进一步把等价关系在放宽，例如把惯性系和非惯性系也认为是新的等价关系。

习题 4.2 (惯性系对的自反性 *). 证明，O_1 在 O_1 下看来做匀速直线运动的。

习题 4.3 (惯性系对的对称性 *). 证明，如果 O_2 在 O_1 下看来做匀速直线运动，则 O_1 在 O_2 坐标系下看来，也做匀速直线运动。

习题 4.4 (惯性系对的传递性 *). 证明，如果 O_2 在 O_1 下看来做匀速直线运动，并且 O_3 在 O_2 下看来也做匀速直线运动的，则 O_3 在 O_1 坐标系下看来，也做匀速直线运动。

习题 4.5 (理论参考系分类 *). 对以下参考系做一个分类：O_2 在 O_1 下看来做 $v = 10m/s$ 的匀速直线运动，O_3 在 O_2 下看来做 $v = 5m/s$ 的匀速直线运动，O_4 在 O_3 下看来做 $a = 10m/s^2$ 的匀加速直线运动，O_5 在 O_4 下看来做 $v = 2m/s$ 的匀速直线运动，O_6 在 O_3 下看来做 $a = 5m/s^2$ 的匀加速直线运动（初始速度为 $v_0 = 0m/s$），O_7 在 O_3 下看来做 $a = 5m/s^2$ 的匀加速直线运动（初始速度为 $v_0 = 4m/s$）。

习题 4.6 (现实参考系分类 *). 对以下参考系做一个分类：以太阳中心点的运动构建的参考系，以地球中心点的运动构建的参考系，以地球表面上赤道上一点的运动构建的参考系，以北京市天安门广场中心的运动构建的参考系，以你家里门口的某个位置的运动构建的参考系，以你家里另一个位置的运动构建的参考系。注意，在这里你可以针对所讨论的问题，例如地球上汽车的运动、发射卫星上天等做分开的讨论，结合近似处理。

4.3 可观测可表达的物理规律和参考系变换 *

你看到的物理世界应该跟我看到的物理世界一样[1]。

[1] 更严格地，应该是，不同参考系下的物理规律，或者更严格地说，代表物理规律的方程是协变的——协变大概来说就是某种程度上的一致性，具体涵义等到学习到相对论才能讲清楚。现在，我们就用这个看到的物理规律一样，这个不太严格的表述。下面的时间结果不变，速度结果满足伽利略变换，正好分别就是完全一样和协变的例子。

例如，前面我们看到了，尽管变换惯性参考系之后，物体的速度在不同的参考系下测量或者计算出来不一样，但是，你最终计算出来的相遇时间不依赖于参考系，速度和位移的关系这个方程的成立也不依赖于参考系。

于是，我们说，参考系会改变某些物理量，但是不改变物理，或者说不改变物理规律，或者说，不同参考系下面得到的结果相互等价。注意这里的等价。等价并不意味着完全一样。具体哪些东西一样，哪些东西会变换但是实际上一样，还需要具体问题具体分析。具体到这里的惯性参考系——称作伽利略惯性参考系，我们已经假设它们的时间是在同一个尺度和起点下测量的，那么，不同参考系下面算出来的跟时间间隔的结果都应该不变。相应地，如果算出来的是速度，那么，不同参考系下面算出来的速度，自然可以通过速度的伽利略变换关系联系在一起。

除了纯粹从相对运动的角度来处理力学问题，我们会需要用到参考系变换——参考系变换肯定会带来坐标变换——之外，“参考系变换下不改变看到的物理世界”（再次强调更严格的说法应该是，参考系变换下描述物理规律的方程具有协变性）这一点还对物理规律提出了额外的要求。

我们来试试，从惯性参考系变换下速度必须满足伽利略变换这一点，来看看我们对运动规律，例如 $F = ma$，会提出什么要求。

可以证明（粗糙地论证、计算一下，可以局限于特例 ）：第一，$F = ma$ 确实协变，或者说不变。第二，运动定律必定是速度的变化率以上的形式——$F = ma$ 满足，加速度正好就是速度的变化率。

从参考系和坐标变换下物理不变的角度来思考什么样的物理规律可以存在，是现代物理学研究的一个重要角度。将来，等我们学习相对论的时候，我们用同样的角度，会来考察，一旦我们的变换不再是伽利略变换而是洛伦兹变换，则我们的运动定律大概会成什么样子，以及目前的 $F = ma$ 是否在洛伦兹变换仍然具有协变性。甚至，等到进一步学习规范变换的时候，这个从变换下物理不变的角度来思考什么样的物理规律可以存在的角度，仍然是一个威力巨大的角度。

4.4　一维坐标系

原点和一个特定方向（可以运用力的方向，可以运用参考点的某个方向上的特异性），单位长度。

4.5　任何时候伽利略变换都成立吗？

4.6　推荐阅读材料

4.7　作业

4.8　本章小结

第五章　机械能和机械能守恒

5.1　从单摆基本回到原始高度的现象到能量守恒的猜测

5.2　自由落体运动的势能和动能

完整地计算出来

5.3　过山车的动能和势能

5.4　机械能守恒的条件

5.5　推荐阅读材料

5.6　作业

5.7　本章小结

第六章　受力分析和滑轮

6.1　静止物体的受力分析

施力物体，受力物体，Newton 第三定律。

受力分析的意思是找出来每一个物体受哪些力，分别是多大。一般来说，一个力都有受力物体和施力物体。因此，哪些力的意思就是把“一个物体 A 受到来自于另一个物体 B 的性质或者根源或者种类为 C，大小为 F（其实，还有方向为 $\vec{r}$。但是，由于在初中我们一般只讨论一维运动，相应地我们大多数情况下也仅仅讨论一个方向的力，因此，往往里的方向上，我们只需要区分正负号）的力”之中。例如，一个在地球表面的质量为 m 的物体——受力物体，肯定受到来自地球——施力物体，大小为 $G = mg$，方向为竖直向下的地球引力——力的性质。如果我们约定竖直向下为正方向，则这个力是正的。

这个时候，如果这个物体停留在地球表面，以地球表面为参考系没有在运动，则在地球表面上，我们认为其 $a = 0$，根据 $F = ma$ 其受到的力的总和 $F = 0$。于是，肯定有另一个力，和竖直向下的 $G = mg$ 抵消了。也就是说，这个物体存在着一个大小为 mg 方向为竖直向上的力，记作 $N = mg$。这个力可能来自于哪里呢？只能来自于地球表面[1]。是什么性质的力呢？是由于地球表面和物体表面发生了形变而产生的力。类比于弹簧，这样的由

[1]其实，这个物体还可能受到大气给的压力，从而形成的作用在这个上的浮力。不过，我们往往忽略这样的浮力，将来我们会知道因为这个浮力往往很小。

于形变而产生的力，被称作弹力[2]。这个力也可以记作，$N=-mg$，考虑到约定竖直向下为正方向。

如果我们用力的大小，不管方向的记号，写成 $N=mg$，则我们需要在计算合力的时候考虑力的方向，例如，在这里，合力为

$$F=G-N=mg-mg=0. \tag{6.1}$$

如果我们写成 $N=-mg$，也就是把力的符号直接写到力的记号里面，那我们计算合力的时候都用加号，也就是，合力为

$$F=G+N=mg+(-mg)=0. \tag{6.2}$$

两者得到的答案相同。但是，任何时候，你只能选择一种记号习惯来继续。往后，我们一般采用第一种习惯。将来，到了高中以后，我们会倾向于采用第二种习惯。

总结一下静止物体的受力分析：对于某参考系下静止的物体，我们从 $F=ma$ 得到合力 $F=0$；然后，我们把这个物体肯定受到的力先找出来，包含这个力的施力物体、受力物体（就是这个物体本身）、方向、大小、种类根源；最后，根据合力 $F=0$ 找出来这个物体受到的其它的力。如果你所需要做受力分析的对象里面包含多个物体，多个子对象，你可以从受力情况最简单明确的物体开始，不断地使用上面的受力分析方法。

例 6.1 (两个叠起来的物体的受力分析)**.** 有两个堆叠在一起的物体，质量分别是 m_1 和 m_2，整体静止在地球表面。做每一个物体的受力分析。

对于上面的物体 m_1，其肯定受到重力 $G_1=m_1g$。再根据 $F=ma=0$，得到其肯定受到第二个物体给的一个弹力 $N_1^2=m_1g$ 竖直向上。

对于下面的物体 m_2，其肯定受到重力 $G_2=m_2g$ 竖直向下。再根据前面得到的第二个物体给了第一个物体一个弹力 $N_1^2=m_1g$，必然第一个物体也就给了第二个物体一个反过来的力 $N_2^1=m_1g$，竖直向下。再根据第二个物体受到的合力为零，我们得到，其受到的来自于地球表面的弹力为 $F=m_1g+m_2g$，竖直向上，这样第二个物体所受的合力才能为零。

在这里，我们也看到了，如果有多个垒在一起的物块，越往下的物块承受的压力——实际上就是地球表面给的弹力，就会更大。

---

[2]将来我们会知道，其根源是电磁力。

在上面推理和计算的过程中，我们还用到了一个看起来很自然的规律：从第二个物体给了第一个物体一个弹力 $N_1^2 = m_1 g$ 竖直向上，我们推断，第一个物体也就给了第二个物体一个反过来的力 $N_2^1 = m_1 g$ 竖直向下。更一般地，这被称为 Newton 第三定理：作用力和反作用力成对存在，两者的施力物体和受力物体刚好相反，大小相等，方向相反。例如，这里的 N_2^1 和 N_1^2。

按照这个规律，那么，地球给了物体引力，是不是物体也给了地球引力呢？是的，实际上，地球也会受到物体的引力，大小正好就是 mg，方向是由地球中心指向物体（的重心，或者假设物体的质量均匀分布，则就在这个物体的几何意义上的中心）。那为什么我们通常不关注这个反作用力呢？第一，我们经常把地球当作参考系，所以，地球本身怎么运动我们经常忽略不管它。第二，地球的质量往往远远大于我们关注的物体的质量，因此，这个反作用力对于地球运动的影响往往可以忽略不计。

顺便，你可以接着问：为什么会有这个规律呢？首先，这是从实践和实验中总结出来的规律。例如，在冰上，我推你一下，你动了，我能够明显地感受到这个推的反作用，于是我自己也动了，而且相反的方向。其次，用了这个规律算出来的结果和实验和实践相符。例如，你已经看到，这样就解释了堆叠在一起的物块，最下方的受力最大。第三，其实，将来你懂得了力和能量函数之间得关系，以及相应得叫做微分的数学操作，你就能够直接得到这个定律[3]。

顺便，你看到，在这里，你再一次看到了物理学受实验启发，接受实验检验，思考过程受到数学语言的帮助。

6.2 运动物体的受力分析

掌握了静止物体的受力分析以后，我们就可以拓展到 $a \neq 0$ 的情况了，也就是运动物体的受力分析了。

最简单的，我们来考虑一个自由落体运动的物体，假设是一块石头。我们通过测量估算，可以得到其大概的运动的加速度 a。如果这个 a 接近

[3] 具体来说，是这样的：$F_2^1 = \frac{dV_{12}(x_1-x_2)}{x_1} = \frac{dV_{12}(x)}{x}|_{x=x_1-x_2}\frac{d(x_1-x_2)}{x_1} = \frac{dV_{12}(x)}{x}|_{x=x_1-x_2}$，$F_1^2 = \frac{dV_{12}(x_1-x_2)}{x_2} = \frac{dV_{12}(x)}{x}|_{x=x_1-x_2}\frac{d(x_1-x_2)}{x_2} = -\frac{dV_{12}(x)}{x}|_{x=x_1-x_2}$

于 g，那么，其受力情况很简单，只受到重力，因为只受到重力的时候有 $a=\frac{mg}{m}=g$。如果我们发现，其运动的加速度 a 偏离 g 很多，例如一根羽毛的下落。则我们认为，肯定还受到了其它力的作用。这时候，我们就要把这些可能的力，一个个加回去。例如，我们说只可能是空气阻力[4]，那么其效果呢，就相当于 $ma(t)=mg-f$，也就是 $f=mg-ma(t)$。

我们来算一算稍微更加复杂一定的情形。两个物块（还是 m_1 在上方，m_2 在下方）用绳子相连，然后，松开手，同时下落做自由落体运动[5]，绳子上的拉力。我们先对 m_1 来做受力分析。其只受到重力 $F_1=m_1g$ 的作用，于是，$a=\frac{F}{m}=\frac{m_1g}{m_1}=g$，做自由落体运动。同样的道理，$m_2$ 也做自由落体运动。并且，由于两者的加速度相同，初始速度相同，两者之间不会产生相对运动，因此，绳子不会额外变长或者变短，因此，不会产生新的拉力（弹力）。因此，两者之间的作用力 T 可以一直维持 $T=0$。

下面，我们来做比上面的情形更复杂一点的运动中的物体的受力分析。

例 6.2 (挂在沟子上的两个运动的相连的物体的受力分析). 同样上面相连的两个物体 m_1 和 m_2，假设 $m_1>m_2$。现在，我们把它们中间的绳子挂在一个非常光滑（摩擦力可以忽略，将来可以进一步考虑不能忽略的情形）的钩子上，然后，再来做受力分析。

对于上面的物体 m_1，其肯定受到重力

$$G_1=m_1g, \tag{6.3}$$

可能还受到一个来自于绳子的拉力 T_1^2。但是，我们不知道这个 T 的大小。

对于下面的物体 m_2，其肯定受到重力

$$G_2=m_2g, \tag{6.4}$$

可能还受到一个来自于绳子的拉力 T_2^1。但是，我们不知道这个 T 的大小。

[4]这个假设不一定成立，原则上，我们可以造出来更复杂的情形，例如，把羽毛磁化一下，然后放到一个磁场之中。

[5]如果我们让绳子上一开始就有一个很大的力的作用 T，例如 T 接近于 m_1g 或者 m_2g，则两个物块不一定做自由落体运动。我们这里强调两者一起松开，两个物块之间一开始基本 $T=0$。

根据 Newton 第三定律，我们肯定有，其方向相反，大小上

$$T_1^2 = T = T_2^1. \tag{6.5}$$

现在，我们计算两个物体的运动的加速度，注意两者的加速度的大小肯定一样（假设绳子的可以伸长的部分相对于绳子的长度忽略不计）方向肯定相反，有

$$m_1 a = m_1 g - T, \tag{6.6}$$

$$m_2 a = T - m_2 g. \tag{6.7}$$

这个方程组有 a 和 T 两个未知数，求解出来，得到

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g, \tag{6.8}$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \tag{6.9}$$

我们发现，利用好 $F = ma$，实际上，我们仍然可以完成运动中物的的受力分析，并且把这个时候物体做什么运动，也就是 a 是多少，也得到。实际上，将来更加多个物体通过更加复杂的关系构成的做复杂的运动的系统，也是通过上面这个方式来完成受力分析和运动状态的计算的。

总结一下运动物体的受力分析：对于某参考系下运动的单一（运动的加速度完全相同，受力分析也不需要分开来做）的物体，假设其运动的加速度为 a，把这个物体上的肯定受到的力找出来，放到 $F = ma$ 之中，看这个时候力和运动的关系是否符合 $F = ma$。如果符合，则运动物体的受力分析做完。如果不符合，则可能还要考虑其它可能的受力的情况。更进一步，对于某参考系下运动的由多个组成部分构成的物体，我们对于构成这个物体的的各个做相同的运动的部分都假设一个其自身的加速度，有必要的话把这些加速度的关系也找出来；然后，我们把这个物体的每一个步成部分的受力分析做出来；然后，对于每一个组成部分列出来 $F = ma$ 对应的方程；最后，求解练习方程组就可以得到多个组成部分构成的运动物体的受力和运动。

6.3　滑轮的受力分析

6.4　受力分析和物理学

具体问题具体分析，基础物理学的基础，物理思维——力学的世界观的基础

将来被舍弃的分析方法，用能量函数替代受力分析

6.5　推荐阅读材料

6.6　作业

6.7　本章小结

第七章　物质和密度

7.1　浮力现象启发密度概念的提出

生活经验，两两比较，阿基米德和皇冠的故事。

传说，一个国王给了一个工匠一些金子，工匠打造出来了一个漂亮的王冠。国王想检验一下工匠有没有贪墨一部分金子。于是，这个国王请阿基米德来解决这个问题。实际上，这个问题变成了检验一下这个王冠是不是纯金打造的。为什么呢？因为如果国王的金子和王冠的重量本身就不相符的话，那么，只需要称一下王冠重量就可以得到答案。因此，在这里，我们假设两者的重量之差肯定在国王允许的范围内。那需要知道这些重量是否都来自金子就复杂了。也许我们可以把王冠拆分成一小块一小块来看颜色质地、熔点等等，但是，那样王冠就被破坏了。说随机抽样，取出来一小部分来检验，那也可能会破坏其整体。除非有我们今天的技术，我们只需要随机地刮下来一点点沫就可以完成分子水平的检测。那阿基米德也被这个问题困住了。

直到有一天，阿基米德在洗澡的时候，发现，他进浴缸的时候浴缸里面的水溢出来了。他就大叫“尤里卡！尤里卡!”，“找到了，找到了!”。

具体的浮力，我们要到下下一章才能来学习。不过，在这一章，我们需要先用一下这个物体放入水中，有的会沉下去，有的会浮上来这个观察。如果你还没有见过这个现象，去玩玩水，拿着不同的东西放水力试试，看看有没有这个现象。

我们今天来考虑为什么会有这个现象。

7.2 天平上的同样大小的异质的球的区分

一个同样大小和同样颜色的木球和铁球怎么区分？我们很容易就可以通过手感来区分。放在手心，感觉起来很有分量的就是铁球，轻飘飘的就是木球。甚至，一旦我们有了经验，都不需要拿着两个球在直接比较，我们只需要拿着其中一个球感觉一下，就差不多能够知道其是木球还是铁球。那我们是怎么做到的呢？物理学上，我们用什么可测量的指标来刻画这个差别呢？

我们的手，实际上，大概测量了这两个球的质量，然后，我们说同样大小的情况下，重的那个是铁球，轻的那个是木球。物理上，我们用密度来刻画这个差别。

那如果两个物体的大小也不同，怎么办？如果可以修剪，则我们修剪两个物体中的一个，放到水杯里，使得两者体积差不多。这样就回到了第一种情况。用手感估计一下谁更重。用弹簧秤之类的测量一下到底多重，谁更重。

在前面的例子中，将来我们会看到，能够沉入水底和浮在水面上的根本区别是放入水中的物体的密度和水的密度的关系，比水密度大的会沉入水中，比水密度小的会浮在水面上。

下面，我们来定义密度，并且搞清楚为什么会有上面的两个例子中的现象。

7.3 密度的定义

我们把一个物体的密度定义为单位体积下的这种物体的质量，也就是

$$\rho = \frac{m}{V}. \tag{7.1}$$

其中质量 m 的单位是 kg，体积的单位是 m^3，因此，密度的单位是 kg/m^3。

注意，这个定义实际上定义的是一个平均密度。如果这个待测量密度的物体内部并不是均匀的，例如有大小不同的空洞，那么，我们测量和计算出来的就是包含了这些空洞的平均密度。例如，我们可以把一个铁球做成空心的，并且空心的部分的体积非常大，外面就是薄薄地一层铁皮。这个时

候，其平均密度和一个铁球肯定是不一样的。但是，如果你去剪下来其中的一小块铁皮，放入水中测量其体积，放到天平上测量其质量，然后再来计算密度，那么，这个密度就应该和实心铁球的密度差不多。因此，对上面的密度的定义，其实是一个测量性操作性的定义。后面，我们会把平均密度和物质本身的密度理解的更透彻。

由于质量和长度（于是，体积也）都有自己的事先定义好的标准，因此，物体的密度的大小只能按照测量出来的质量和体积来计算，是多少就是多少。但是，下面我们会看到，由于水很常见，把一个东西扔到水里面很容易就能够差不多判断出来其大概的密度。因此，似乎看起来，水的密度应该是某个规定好的特殊值，例如单位 1。实际上，我们也会发现，水的密度就是 $1.0 \times 10^3 kg/m^3$[1]。那这到底是怎么做到的呢？实际上，历史上，我们是先参考水的密度来定义质量的标准——也就是一个立方分米的水定义为一千克，然后，再用这个千克来制作千克原器，再用这个千克原器来定义其它质量单位。

通过计算修剪下来的物体的密度，发现，均匀物体密度相同。

选择均匀物体，分别密度大于水和小于水，放入水中，展示沉下去和浮起来的现象。提出，为什么有的沉下去，有的浮起来的问题。注意帮助学习者发现，沉浮和体积（只要足够小，杯子和杯子里面得水容纳得下）无关，仅仅是密度有关。

用烧杯，量杯，到用家里的玻璃水杯加上尺子来测量。

有了密度的概念，我们就可以来帮助阿基米德回答国王的问题了：实际上，我们只需要测量出来王冠的密度，然后和金子的密度来比较。或者，在实际操作中，反过来，找出来相同质量的金子，来看看水的体积大，就行了。具体操作如下：称出来王冠的重量，找同样重量的纯金子来；找两个足够大的形状完全相同的水杯，装好足够淹没金子和王冠的水，两个杯子初始水量完全一样，高度完全相同；把王冠和金子分别放入其中的一个杯子，比较杯子中水面的高度。如果高度像差很大，则肯定不是纯金子做的。

因此，我们发现，阿基米德洗澡其实发现的是——“沉入水中的物体

[1]将来我们会知道，物质的密度依赖于其状态，在水而言，依赖于其温度还有外界压强。因此，实际上，这里值的是一个标准大气压下温度为 4° 的水的密度。不过，暂时，我们不进入这个细节。

是的水面上升，并且上升的高度完全取决于这个物体的体积（更严格地说，沉入水中前后水的体积的增加正好等于沉入水中的物体的体积）”，以及每种物质都有自己的特定的密度的这个假设！也就是说，实际上，阿基米德洗澡并没有直接发现浮力，其观察到水溢出这件事情跟浮力也没有直接关系。在下一章，我们才会看到密度、排开水的体积真的和浮力的关系。

补充一个典型物质的密度的列表。

密度的定义背后有一个假设：从 $\rho = \frac{m}{V}$ 我们发现，实际上，我们定义的是一个物体的平均密度，但是由于我们经常就把物体的平均密度看作是相应的物质的内在密度属性，我们其实假设了——构成这个物体的物质是均匀分布的。实际上，我们就算用同一种物质来做出来一个物体，我们也可以在物体中间的不同地方做出来一些大小不一的孔洞，于是导致物体里面物质的分布并不均匀。在一般情况下，当我们从某种物质构成的物体的密度推广到这种物质的密度的时候，我们总是做了这个均匀假设的。

那么，就算是均匀的，为什么不同的物质它们具有不同的密度呢？

7.4 密度差异的来源 *

实际上，不同的物质的密度是由这种物质的不同的基本单位——我们粗糙地先称作这种物质的分子结构，和这些基本单位的排列方式来决定的。

将来我们会知道，物体的状态可以大概分成气体、液体和固体三种。气体由气体分子构成，分子之间没有特定的排列和结构，基本[2]没有相互作用。液体和固体也是由相应的分子构成，但是分子之间存在着某种排列和结构。密度就是由这种物质的分子本身的质量和分子之间的排列结构决定的。

对于气体，由于其没有排列结构，则气体分子的密度主要由分子本身的质量决定，同时压强和温度会影响同样数量的分子的总体积，因此，气体分子的密度主要由分子本身的质量、压强和温度决定。

对于液体和固体，分子之间的空隙主要是由分子的排列结构决定的，因此，排列结构和分子本身的质量合起来共同决定了物质的密度。例如，下面我们展示了两种不同的分子的相同结构构成的物质及其密度，两种同样的

[2]将来进入大学，我们会提到，尽管气体分子之间没有直接的相互作用，但是，还是会有碰撞形成的有效相互作用。

分子的不同的结构构成的物质及其密度，两种不同的分子的不同的结构构成的物质及其密度。

因此，我们说，物质的密度是由分子本身的质量和分子排列结构决定的，而物体的密度是在物质的密度的基础上由从物质做出来物体的时候引入的孔隙来决定的。当然，一旦你明白这个道理，这一节讨论的物质本身的分子结构和上一节讨论的从物质造出来物体的时候引入的人工结构（例如玻璃杯，中空的球，铁做出来的船，多孔海绵等等）都是基本单位之间的空隙距离。

这就是密度背后的物理。就目前而言，这一节的知识——每一种物质背后有对应着的分子和分子之间的排列方式构成的结构，是我们直接给你的。没有经历把这个知识探索出来的过程，尽管稍微地展示了一些这些结构的证据。将来我们会补充上这个探索的过程和进一步的证据。例如，我们实际上还得追问是什么样的力使得分子按照这种方式的排列能够具有某种意义上的稳定性所以物质才能以这种形式存在呢?

将来我们甚至会进一步发现，其实，每一种物质对应的分子也有更加基本的结构，其背后是一个叫做原子的东西，以及把这些原子合在一起的力，而这些原子的类型的数量比分子要少很多，原子之间的力的种类也不多。

将来我们甚至会更进一步发现，原子也可以看作更基本的物质单位——将来会被称作质子、中子、电子、光子等——和相应的相互作用构成的，并且这些更加基本的物质单位和其之间的力的种类会更少。

再进一步，将来我们还会看到，我们不断地追求用更加基本和数量更少的基本单位，以及这些基本单位之间的力的作用，对物理系统，是一个很好的描述世界理解物理系统的行为的道路。

7.5 推荐阅读材料

7.6 作业

习题 7.1 (已知体积和密度求质量)**.** *一个边长为 $10cm$ 的正方体杯子，能装多少水（没有特殊交代的时候，都按照 $4°$ 和一个标准大气压的情况算），能装多少酒精？*

习题 7.2 (已知体积和密度求质量). 一个底面圆形半径为 $5cm$ 的高为 $15cm$ 的圆柱形杯子，能装多少水，能装多少酒精？

习题 7.3 (已知质量和密度求体积). $2kg$ 的水和酒精，各自需要多大体积的杯子才能装得下？如果我们需要把两者混在一起呢，大概需要多大的杯子？

习题 7.4 (按照质量来混合求密度). 把 $1kg$ 的水和 $2kg$ 的酒精在一个杯子里面均匀混合起来，其密度是多少？

习题 7.5 (按照质量来混合求密度). 把 $2kg$ 的水和 $1kg$ 的酒精在一个杯子里面均匀混合起来，其密度是多少？

习题 7.6 (按照质量来混合求密度). 把质量为 m_w 的水和 m_a 的酒精在一个杯子里面均匀混合起来，其密度是多少？

习题 7.7 (按照体积来混合求密度). 把体积为 $1l$ 的水和 $2l$ 的酒精在一个杯子里面均匀混合起来，其密度是多少？

习题 7.8 (按照体积来混合求密度). 把体积为 $2l$ 的水和 l 的酒精在一个杯子里面均匀混合起来，其密度是多少？

习题 7.9 (按照体积来混合求密度). 把体积为 V_w 的水和 V_a 的酒精在一个杯子里面均匀混合起来，其密度是多少？

习题 7.10 (质量-体积-密度和速度-路程-时间的对比). 联系平均速度的定义和平均速度的计算，回答速度、路程、时间，和这里的质量、体积、密度之间的对应关系，也就是哪个量和哪个量比较像。例如，你可以通过完成以下两个问题，然后来和这一章前面已经完成的问题来对比，从而来找到这个对应关系。我们上山的速度是 v_u，下山的速度是 v_d。第一，当我们爬山的时候，上山用了 t_u 时间，下山用了 t_d 时间的时候，其平均速度是多少？第二，当我们爬山的时候，上山走了 L_u 的路程，下山走了 L_d 的路程的时候，其平均速度是多少？

习题 7.11 (关于广延量和强度量的阅读思考题). 将来你会发现，上面的对比，其实就是要区分好广延量和强度量，其中前者可以直接加起来，后者不能。在正式学习广延量和强度量的概念以及对比这两个概念之前，你可以试试自己找出来更多的广延量和强度量，或者通过阅读其它材料大概了解

一些什么是广延量，什么是强度量。

习题 7.12 (通过体积测量或者估计质量，或者反过来). 在很多面包或者蛋糕等的配方里面，各种原材料的单位有的时候是通过 g, kg 来给出的，有的时候使用 ml, l 来给出的。当然，你最好既准备有刻度杯又准备有电子秤，但是，万一你有的时候只准备了一种呢，那时候请你想想怎么办？想清楚以后，回去找个配方去试试。

7.7 本章小结

第八章　压力和压强

8.1　底面支持力和压力

桌子上有容量为 $500ml$ 的杯子里面装了一杯子水，杯子本身的质量为 $10g$。请问这杯水受到的桌面的支持力是多大，桌面受到的这杯水的弹力是多大？如果把问题改成杯子里面装了花生油呢，石蜡呢，沙子呢？重复这个计算。

我们发现，杯子受到的桌子给的弹力，只跟整体质量，或者更准确地说和这个质量相应的重量有关。

8.2　固体接触面的压强

同一个力作用在不同大小的表面下的效果，例如图钉的钉头和屁股，冰面上行走和爬行。

同样的表面，在不同的力作用下的效果，例如同一个图钉能够还是不能够钉入墙，同样的冰面上面站一个小孩，还是开一个坦克。

物理是对现象的描述：已经看到对接触面的破坏力和面积，以及力有关，则需要定义一个相应的量来体现这个现象程度不同的指标——物理量，

$$P = \frac{F}{S}. \tag{8.1}$$

表示了“压力越大，压强越大；受力接触面积越小，压强越大”

固体侧面的压力传递：固体仅仅把力沿着这个力本来的方向传递。例如在重力作用下，其侧面不会感受到重力的效果。做实验。

一个长方体物块底面承受的压强，

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho_m V g}{S} = \frac{\rho S h g}{S} = \rho_m g h. \tag{8.2}$$

液体向各个方向传递压强（为什么不是传递压力呢？划分出来一个任意小的体积元）。

8.3 液体中的压强

液体底面的压强，液体各个侧面的压强。

在水里面，取一个小小长方体的“水块”，做同样的计算，有

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho_w V g}{S} = \frac{\rho S h g}{S} = \rho_w g h. \tag{8.3}$$

因此，完全由重力导致的液体内部压强的计算公式是，

$$P = \rho_l g h. \tag{8.4}$$

其中 ρ_l 是液体的密度，h 是液体内部的深度，也就是液体中测量压强的点到液体表面的高度差。

如果液体表面已经有一个其它原因导致的压强，例如外界挤压水的表面，则

$$P = P_0 + \rho_l g h. \tag{8.5}$$

8.4 大气压强

气体，和液体也相同在重力作用下，原则上也满足

$$P_a = \rho_a g h. \tag{8.6}$$

但是，一般来说，ρ_a 远远小于液体的密度，除非 h 很大很大，才不能忽略。实际上，大气层的 h 确实很大很大。因此，大气会给物体一个压强。实际

上，压水井就是利用的这个原理，帕斯卡也是如此测量的大气压。我们还可以用一个简单的和帕斯卡实验原理相同的实验来展示大气压——开口向下的杯子下垫着的不下落的扑克牌。

帕斯卡测量大气压，压水井，垫着的不下落的扑克牌：$P_a > \rho_w g h$。

连通器原理：开着口底下连通的容器内的水面一样高，$P_a + \rho_w g h$ 各处相等。如果由密闭口子，则，那个口子里面可能封闭了一段空气，其压强 P_a 可能和外界大气压不一样，就不一定会达到水面一样高。

虹吸现象：连通，开口，在达到一样高之前，只能不断地从水面高处吸取水，送到低处。不需要额外动力的抽水机，只需要有大气压。漂亮的虹吸实验，实际生产过程中的虹吸装置。

8.5 推荐阅读材料

8.6 作业

习题 8.1 (压强基本公式). *两块垒起来的密度为 $3.0 \times 10^2 kg/m^3$ 的正方体形的石头，其边长分别为 $10cm$ 和 $5cm$。如果 $5cm$ 的在下面，求其底面的压强。如果 $10cm$ 的在下面，求其底面的压强。*

习题 8.2 (液体压强基本公式). *有一个容器，由上下两个正方体构成，里面装了密度为 $1.0 \times 10^2 kg/m^3$ 的液体。两个正方体的边长分别为 $10cm$ 和 $5cm$。如果 $5cm$ 的在下面，求其底面的压强。如果 $10cm$ 的在下面，求其底面的压强。*

习题 8.3 (压强能相加吗). *参照之前密度的习题，编制压强相加的习题，同样注意面积可以相加，压力可以相加，但是压强不行（除非面积相同，压力相加，导致压强相加的效果）*

8.7 本章小结

第九章　浮力

–

9.1　浮力的来源和公式

有了压强公式之后，我们来做沉入水中的物体的受力分析。为了简单，我们把这个物体看作是长方体。首先，有重力 $G = mg$。其次，有上表面受到的水给的压力，$F_1 = P_1 S$[1]，和下表面受到的水给的压力 $F_2 = P_2 S$。最后，如果接触到了容器的底部，则还会受到一个容器底部给的弹力 N。

我们来计算一下上下表面受到的水的压力。按照水的加强公式，我们有

$$P_1 = \rho_w g h_1, \tag{9.1}$$

$$P_2 = \rho_w g h_2. \tag{9.2}$$

因此，

$$F_1 = \rho_w g h_1 S, \tag{9.3}$$

$$F_2 = \rho_w g h_2 S . F_B = \rho_w g V \tag{9.4}$$

$$F_B = F_2 - F_1 = \rho_w g \left(h_2 - h_1\right) = \rho_w g h S = S \rho_w g V. \tag{9.5}$$

对于一般液体，我们有

$$F_B = \rho_l g V \tag{9.6}$$

[1]大气压暂时不算，你可以检验，写进去不影响最终结果。

其中，ρ_l 是液体的密度，g 是重力常数，V 是物体沉入水中的体积。

结合其它的力，我们有

$$G = N + F_B \Rightarrow \rho_m g V_m = N + \rho_l g V \Rightarrow N = \rho_m g V_m - \rho_l g V. \tag{9.7}$$

假设我们的物体的密度 ρ_m 大于液体的密度 ρ_l（$\rho_m > \rho_l$），则

$$N = \rho_m g V_m - \rho_l g V > \rho_m g V_m - \rho_l g V_m = (\rho_m - \rho_l)\, g V_m > 0. \tag{9.8}$$

可以存在一个向上的弹力。

但是，如果反过来，$\rho_m < \rho_l$，则当物体完全沉入液体下的时候 $V = V_m$，我们必须有

$$N = \rho_m g V_m - \rho_l g V_m = (\rho_m - \rho_l)\, g V_m < 0. \tag{9.9}$$

这不可能：不能存在一个向下的容器壁给的弹力（或者说引力，拉力）。

因此，当物体的密度小于液体的密度的时候，物体肯定不能完全沉入液体，那么，也就是只有浮在液体表面了。其实，还有一个特殊情况，当物体的密度正好等于液体的密度的时候，物体可以在液体内部任何地方停留，可以以任何部分进入液体同时保留任何比例在液体之外。这称为悬浮。因此，合起来，我们有沉于水底，浮于水面，和悬浮三种情况。

例 9.1 (沉入水底的铁球). 有一个沉入水底的铁球，质量为 $100kg$，密度为 $7.8 \times 10^3 kg/m^3$。一根绳子其最大能够承受的拉力是 $500N$。请问，这根绳子是否可以把这个沉入水底的铁球拉到水面上（只要铁球顶端露出水面就算成功。例如，人们就可以下去直接把铁球抱上来）。

要算出来的是什么：绳子上的拉力 T，然后和 T_{max} 比较一下。

已知什么：铁球的质量 m 和密度 ρ_m，水的密度 ρ_w。

已知和要算出来的东西之间由什么关系：铁球在水里受到水的浮力 F_B，受到重力 G，受到绳子的拉力 T，合起来必须有 $T + F_B \geqslant G$。于是，我们需要算出来 F_B。根据物理知识，$F_B = \rho_w g V_{in}$，铁球整个都沉入水底的时候有 $V_{in} = V_m$，而铁球的体积可以由 $V_m = \frac{m}{\rho_m}$ 得到。因此，我们有

$$V_m = \frac{m}{\rho_m}, \tag{9.10}$$

$$F_B = \rho_w g V_{in} = F_B = \rho_w g V_m, \tag{9.11}$$

$$T = G - F_B. \tag{9.12}$$

最终我们得到，

$$T = mg - \rho_w g \frac{m}{\rho_m} = mg\left(1 - \frac{\rho_w}{\rho_m}\right). \quad (9.13)$$

推导完公式以后，代入各个数值，有

$$T = 100kg \times 9.8N/kg \times \left(1 - \frac{1.0 \times 10^3 kg/m^3}{7.8 \times 10^3 kg/m^3}\right) \approx 855N. \quad (9.14)$$

最后的结果，我们尽可能地在四舍五入的时候往大了算，因为这样可以给绳子留点余地，更加保险。但是，我们发现，这个数值已经远远大于绳子承受的最大拉力 $T_{Max} = 500N$。

因此，绳子不能拉起来这个铁球。

在实际当中，其实更多的时候，是我们需要这样来估算一个绳子承受的拉力，然后选择一个满足这个要求的绳子。

顺便，所有的问题，你需要列出来已知什么，需要求出来什么，通过直接的已知加上物理知识之后，可以得到的间接的已知有哪些，然后思考要算出来的东西和直接还有间接已知的东西之间的联系。

当然，作为物理问题，有必要的话，最后我们总是可以做实验来检验的。例如上面的问题中，我们就可以拿着这根绳子去拉这个铁球试试，看看是不是如我们所计算出来的结果一样。

9.2 浮在表面上的物体受到的浮力

物体的平均密度，或者说有效密度，小于液体的密度的时候 $\rho < \rho_l$，浮在表面上。为什么？如果沉下去，则浮力 $F = \rho_l g V > G = mg = \rho g V$ 且向上。

这时候，我们问进入液体的体积是多少呢？我们有受到的浮力这时候刚好等于物体受到的重力，也就是

$$\rho_m g V = G = mg = F_B = \rho_l g V_{In} \Longrightarrow V_{In} = \frac{\rho}{\rho_l} V = \frac{m}{\rho_l}. \quad (9.15)$$

例 9.2 (排开水的体积). 在一个粗细均匀的底面积为 $400cm^2$ 的大烧杯里面放上一个粗细均匀的底面积为 $200cm^2$ 的小烧杯。标记出来水面在大烧杯和小烧杯上的位置。现在，在小烧杯的内部放入一个质量为 $100g$ 的石头，

请问：小烧杯没入小烧杯的水线变化了多少，大烧杯上的新的水线的位置和旧的水线的位置相比变化了多少？

第二问大烧杯的问题比较复杂，我们先来计算小烧杯的水线位置。

要算出来的是什么：小烧杯的旧水线 h_1^a 和新水线 h_2^a 之间的变化。

已知什么：小烧杯的底面积 S^a，大烧杯的底面积 S^b。新增加的石头的重量 m。

已知和要算出来的东西之间由什么关系：由于需要计算的仅仅是新旧水线的变化，我们可以先假设一个小烧杯的质量 m^a，看看将来是否计算过程中可以把这个假设的量消掉。有了这个量之后，我们可以计算出来小烧杯两次没入水中的体积，然后从体积可以算出来没入水中的高度。也就是

$$F_{B,1} = \rho_w g V_{in,1} = m^a g, \tag{9.16}$$

$$F_{B,2} = \rho_w g V_{in,2} = m^a g = mg, \tag{9.17}$$

$$h_1^a S^a = V_{in,1}, \tag{9.18}$$

$$h_2^a S^a = V_{in,2}. \tag{9.19}$$

最终我们得到，

$$\Delta h^a = h_2^a - h_1^a = \frac{m^a + m}{\rho_w S^a} - \frac{m^a}{\rho_w S^a} = \frac{m}{\rho_w S^a}. \tag{9.20}$$

推导完公式以后，代入各个数值，有

$$\Delta h^a = \frac{0.1kg}{1.0 \times 10^3 kg/m^3 \times 200 \times 10^{-4} m^2} = 0.5cm. \tag{9.21}$$

小烧杯更多地没入水中，增加的没入水中的高度为 $0.5cm$。

插入图：大烧杯原始的水面，小烧杯放入大烧杯以后的大烧杯水面的高度和小烧杯没入水面的深度，小烧杯放入石头以后再次放入大烧杯时大烧杯水面的高度和小烧杯没入水面的深度，相应的各个高度的标记。

现在，有了这个高度差，我们来计算外侧大烧杯水面的变化。这个时候，我们注意到水的整体体积不变，也就是说，

$$S^b h_0^b = S^b \left(h_1^b - h_1^a\right) + \left(S^b - S^a\right) h_1^b, \tag{9.22}$$

$$S^b h_0^b = S^b \left(h_2^b - h_2^a\right) + \left(S^b - S^a\right) h_2^b. \tag{9.23}$$

左侧是大烧杯中没有放任何物体时候的水的体积。第一行的右侧是大烧杯中放入了小烧杯的时候的体积的构成：一部分是大烧杯到小烧杯底面的水的体积，一部分是小烧杯外侧的水的体积。第二行右侧是大烧杯中放入了小烧杯和石头的时候的体积的构成：一部分是大烧杯到小烧杯底面的水的体积，一部分是小烧杯外侧的水的体积。

上面的方程中，h_0^b, h_1^b, h_2^b 都未知，但是两式相减 h_0^b 可以直接被消掉，相减以后，把 $\Delta h^b = h_2^b - h_1^a$ 放到一起当作未知数，可以得到

$$\Delta h^b = \frac{S^a}{2S^b - S^a}\Delta h^a = \frac{200cm^2}{2\times 400cm^2 - 200cm^2}0.5cm = 0.17cm. \tag{9.24}$$

答：加入石头以后，小烧杯吃水更深了 $0.5cm$，大烧杯内的水面提高了 $0.17cm$。

从上面最后的结果我们也可以看出来，大烧杯的水面上升的高度 Δh^b 和小烧杯没入水中的高度 Δh^a 完全成正比，而后者又跟浮力成正比。因此，实际上，我们只要知道了浮力增加了多少，就可以得到相应的水面上升的数值。

在后面关于水面上升的讨论中，我们其实都在使用这个结论。注意，在这个例题中，我们希望你能够自己会算前半个，也就是 Δh^a，能够看懂 Δh^b 的计算，以及知道和大概想得通上面的结论——水面的上升高度只需要考虑浮力增加了多少。

习题 9.1 (曹冲称象). 在一个烧杯里面放上一个长方体塑料盒子，让它浮在水面上。只要尽量接近长方体就可以。或者用另一个小一点的烧杯放到大烧杯的里面，只要基本满足里面的盒子和外面的烧杯基本上都是粗细均匀的就可以。或者用粗细大概均匀保的温饭盒。如果不太稳定，你可以在塑料盒子里面放点压舱石。在塑料盒子上标记出来这个时候的水面的高度。现在，你往塑料盒子里面放上 $100g$ 的石头，画出来这时候的吃水线。接着再放 $100g$ 石头，画出来吃水线。不断地重复这个过程，直到塑料盒子的吃水线接近其上方口子。拿下来这个塑料杯子，擦干，在已有的两格刻度线之间，看情况均匀分成几份。例如，2 份，5 份，10 份。现在，拿着这个塑料杯子去测一下一块不知道质量的石头。请问如何来读这个读数？然后，用天平或者弹簧秤测量一下这个石头的质量，对比一下。如果这个塑料杯子粗细不均匀呢是否能做类似的事情？如果我们把刻度画在外面的大烧杯上，

能够用来做类似的测量吗？

小知识 9.1 (轮船的多条吃水线). 在航海的轮船上，通常标记有这条船的吃水线，并且不止一条线。通常有区分不同海域的吃水线，例如 *TF*–热带淡水 (*Tropical Fresh water*) *F*–淡水淡水 (*Fresh water*) $\check{T}$–热带海水 (*Tropical sea water*) 小号–夏季海水（*Summer sea water*）$\hat{w}$–冬季温带海水冬季海水 (*Winter sea water*) *WNA*–冬季北大西洋水 (*Winter North Atlantic Ocean water*) 插入一张实物图。中文代码也写上。

那什么是吃水线，为什么会有在不同水域航行适用的不同的吃水线呢？

吃水线表示的是船允许装的最满的时候，水面的位置离甲板的距离。这个距离需要比较高一点，才能保证如果船由于某种原因增加了重量，例如进了一定量的水，还有一个余地来保证其安全。

那为什么在不同的水域，这个吃水线高度还不一样呢？假设一条船无论在哪里航行，其总重量不变，都装的满满的。那么，其浮力和没入水中的体积有如下关系 $mg = \rho_l g V_{in} \Rightarrow V_{in} = \frac{mg}{\rho_l g} = \frac{m}{\rho_l}$。这个没入水中的体积决定了吃水量，确定了船进入水的高度。于是我们发现，在不同密度的水域里面，由于水的含盐量和温度不同，水的密度不一样，导致了这个高度不一样。这就是为什么轮船会有多条吃水线。

9.3 推荐阅读材料

9.4 作业

习题 9.2 (石头沉入水中水面的升高). 一块密度为 $3.0 \times 10^3 kg/m^3$ 的质量为 $10kg$ 的石头沉入底面积为 $1m^2$ 的长方体水杯中（杯中水足够多，足以淹没整个石头），水面上升多少？

习题 9.3 (石头放到船上水面的升高). 水面上有一条空船（船体本身确实有一个重量，但是这里我们不需要这个数据）。一块密度为 $3.0 \times 10^3 kg/m^3$ 的质量为 $10kg$ 的石头放到船上，船没有沉。这时候的水面，和空船的时候的水面相比，上升多少？

习题 9.4 (石头从船上沉入水中水面的变化). 一块密度为 $3.0 \times 10^3 kg/m^3$ 的

质量为 $10kg$ 的石头一开始放在水面上的一条船上，然后，这块石头沉到水里。这时候的水面和石头在船里的时候的水面相比，上升了还是下降了？

习题 9.5 (水中的冰)**.** 一块密度为 $0.8\times10^3 kg/m^3$ 的质量为 $10kg$ 的冰沉入底面积为 $1m^2$ 的长方体水杯中（杯中水足够多，足以淹没整个石头），水面上升多少？

习题 9.6 (化掉的冰)**.** 一块密度为 $0.8\times10^3 kg/m^3$ 的质量为 $10kg$ 的冰一开始沉入底面积为 $1m^2$ 的长方体水杯中（杯中水足够多，足以淹没整个石头），后来冰化掉了成了水。请问，在冰化掉之前和之后，水面上升还是下降了？

9.5　本章小结

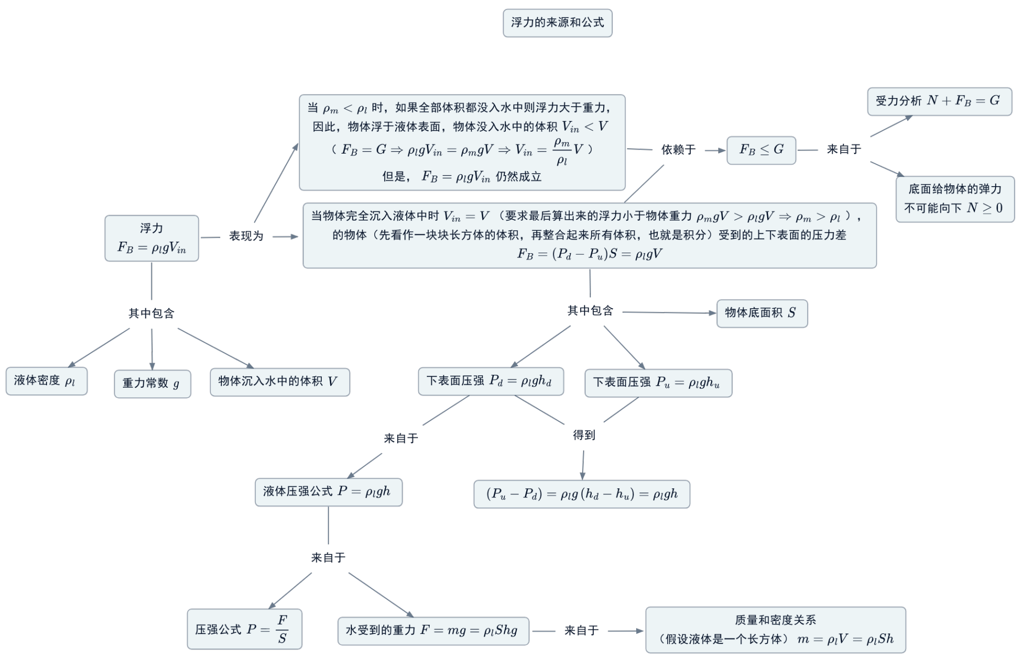

图 9.1: **浮力的来源和公式**。在这里，我们把这三章以来的主要公式及其之间的关系，尤其是浮力的来源和公式做了总结。此外，这张图还体现了物理知识的系统性，以及数学当作物理学的语言（描述世界和帮助物理学家思考）。考虑横版印刷这张图。

第十章 电学

10.1 磁极

磁极的发现。

人类对电和磁的现象的研究还是可以和物体的运动联系在一起的。将来我们会遇到物体子电厂和磁场中运动的现象。那个时候，我们会关心什么样的物体，或者说具有哪些属性这些属性值分别是多少的物体，在什么样的电场和磁场里面，会如何运动的问题。于是，自然，我们就需要掌握电场（就是一个带有某种“电”属性或者说影响物体的电运动的空间）和磁场（就是一个带有某种“电”属性或者说影响物体的磁运动的空间）的描述，物体的那些和电磁相关的属性，以及可以的话，把电场和磁场的描述传化成力，然后用 $F = ma$ 联系到运动。

不过，在历史发展过程中，电磁现象也有不依赖于运动学和动力学的自身发展的例子。我们先从那里开始。

我们找来很多块磁铁。很容易就能发现，两块磁铁的四个端会分成两种情况：因为这四个端之间不是相互吸引就是相互排斥。我们把这四个端分别记作 $1_S, 1_N, 2_S, 2_N$。编号方式如下：选第一块磁铁的任意一端记为 1_S，另一端记为 1_N；把 1_S 靠近第二块磁铁的一端，如果两端相互吸引，则把第二块磁铁的那个端口记作 2_N，否则两端肯定相互排斥并且记相应的端口为 2_S；或者拿着把 1_N 靠近第二块磁铁的一端，如果两端相互吸引，则把第二块磁铁的那个端口记作 2_S，否则两端肯定相互排斥并且记相应的端口为 2_N。对所有的磁铁重复以上的过程。不管是都拿着第一块磁铁完全一模一

样的重复上面的过程，还是用中间已经被编号的磁铁，来重复以上的过程。我们会发现，只要第一块磁铁的编码一确定，则最终得到的其它磁铁的每个端的编号是一致的，也就是不随着我们到底用哪一块磁铁的哪一端来重复以上的过程。

例如，我们可以检验，拿着 1_S 做和拿着 1_N 做得到的第二块磁铁的各端的编号相同。我们还可以检验，都用第一块磁铁来编号，和，先定下来第二块磁铁的各端的编号，然后用第二块磁铁来确定第三块磁铁的各端的编号，得到的第三块磁铁的各端编号是相同的。这说明什么呢？说明磁铁可以分为两极，不管这两极分别叫什么名称，两个名称就够了。

历史上，人们大概先猜出来有两种磁极再来检验是不是真的如此的。但是，我们学习了数学之后，就会发现磁极之间的关系满足等价关系的要求。例如，我们把相互排斥看作等价关系。你看它们具有对称性和传递性。也就是如果磁铁的端口 AB 互斥，则 B, A 也互斥；如果 AB 互斥而且同时 B, C 也互斥，则 A, C 互斥。除了自反性在这里比较特殊，不好直接实验操作：一个端口和它自己不能直接放在一起来看相斥还是相吸引。注意，吸引关系是够不成等价关系的：吸引关系具有对称性，但是没有传递性。因此，通过相斥关系，我们就可以找到所有的磁极分成几个类了。我们一开始把 1_S 放到第一个类，记作 S 类。然后，就能发现，2_S 也会进入 S 类，接着 3_S 等等等等。穷尽完这个类，我们肯定至少会得到另一个类，因为有 2_N 它和 1_S 相互吸引，于是不能放到同一个类。我们新建一个 N 类类存放它们这样的元素。于是，从 2_N 开始，我们发现，1_N 也应该属于 N 类，以及 3_N 等等等等。你看，我们有了两个类，并且穷尽了所有的磁铁的所有端。这两个类的共有属性也明确了：这两类的背后代表了两种相斥的属性。

如果我们把其中的一块磁铁打断，例如在中间分开，我们会发现，这个断开两半的磁铁的每一半，仍然会出现上面两种不同的端。这表示，磁铁不仅仅具有两个磁极，同样的磁极之间相互排斥，不同的磁极之间相互吸引，并且每个磁铁的内部不是分成了类似于两种聚集的物质，而是一种嵌套的更加复杂的结构。如果是两种物质的聚集，则断开之后，应该是一边呈现 S 的属性，一边呈现 N 的属性。

后来，人们发现，S 和 N 这两个本来可以任意给的一对相反的名称也可以借用地球上人们称为地理南北极的习惯定下来：再定下来地球的南北

极之后，把指向再地球表面上指向地理方位上偏北（将来我们会发现那里是地球磁场的南极附近）的磁极称作磁铁的北极，指向地理方位上偏南（将来我们会发现那里是地球磁场的北极附近）的磁极称作磁铁的南极。

10.2 电荷

电荷的发现和测量

人们从磁的现象中发现，磁极只有两个。人们从电的现象中也发现，电荷只有两种。我们来看看这是怎么发现的。

我们先找一个橡胶棒来摩擦一下头皮。最好是在比较干燥的天气做这个实验。然后，我们把纸撕成半厘米左右的小碎片。你会发现，摩擦头皮以后的橡胶棒，其实塑料梳子就差不多可以，可以把小纸片吸气来。如果你用丝绸摩擦一下玻璃棒，发现，也可以有这个效果。你不仅仅可以让小纸片跳舞，还可以拿着摩擦头皮以后的橡胶棒，或者摩擦丝绸以后的玻璃棒去控制水流。

我们首先，猜测，摩擦头皮以后的橡胶棒上面带有某种物质，这种物质使得小纸片可以被吸起来。摩擦丝绸的橡胶棒上面也带有某种物质，这种物质使得小纸片可以被吸起来。这两种物质可能相同，或者某种意义上比较接近。我们来检验一下这两种物质是不是同一种。为了这个目的，我们需要四个小气球，两个小木棍（尽量选轻的），两根长线，几条用来拴住气球进气口的短线。

先把四个气球都吹好气，然后用短线封闭进气口。气不一定很足，只要基本能够鼓起来就行。尽量做到吹入的气差不多，不过也不用追求完全相同。把两个气球分别系到木棍的两端。再把木棍用长钱系住大约中间的位置，把长线的另一头挂起来，例如挂到天花板上。稍微调整一下长线在棍子上的位置，使得其两端大概能够平衡。也就是，别一段高高翘起来，另一端沉下去。基本差不多就行，也不用追求完全平衡到水平位置。

然后，我们用摩擦过头皮的橡胶棒和摩擦过丝绸的玻璃棒来做这两组气球的实验。第一，通过分别拿着摩擦过丝绸的玻璃棒和摩擦头皮以后的橡胶棒靠近一个气球，我们发现，摩擦过丝绸的玻璃棒和摩擦头皮以后的橡胶棒都可以吸引气球。第二，通过拿着摩擦过丝绸的玻璃棒接触一个气

球，再拿着这个接触过的气球来靠近另一个气球，我们发现，另一个气球也会被吸引；通过拿着摩擦头皮以后的橡胶棒接触一个气球，再拿着这个接触过的气球来靠近另一个气球，我们发现，另一个气球也会被吸引。第三，通过拿着摩擦头皮以后的橡胶棒接触一个气球，再拿着重新摩擦头皮以后的橡胶棒接触一个气球，我们发现，这两个气球相互排斥；通过拿着摩擦过丝绸的玻璃棒接触一个气球，再拿着重新摩擦过丝绸的玻璃棒接触一个气球，我们发现，这两个气球相互排斥；通过拿着摩擦头皮以后的橡胶棒接触一个气球，再拿着摩擦过丝绸的玻璃棒接触一个气球，我们发现，这两个气球会被相互吸引。

首先，和磁极一样，通过相互排斥的关系，我们可以定义一个等价关系，得到两个分类：所有的摩擦头皮以后的橡胶棒是一类，所有的摩擦过丝绸的玻璃棒构成一类。并且，将来无论拿什么样的两样东西相互摩擦，只要我们去让摩擦后的物体去跟气球接触，然后，得到接触气球要么和摩擦过丝绸的玻璃棒互斥，要么和摩擦头皮以后的橡胶棒互斥，那么，这两个分类就是完整的。顺便，请你来做实验试试，更多的摩擦起电，以及检验一下是否永远和上面两种情形相互排斥。因此，我们说电荷有两种。而且，在实验三中，我们发现，凡是两种电荷的不同种靠近，它们都会相互吸引。也就是和磁极一样，分两种，同种相排斥，异种相吸引。

按照异种相吸引，我们知道了，在实验一中，很可能是气球上的电荷在靠近橡胶棒的时候，聚集了一些橡胶棒上的电荷的异种电荷，同样气球上的电荷在靠近玻璃棒的时候，聚集了一些玻璃棒上的电荷的异种电荷。在实验二中，橡胶棒接触气球之后有一步电荷传递到了气球上，因此，气球具有了和实验一中类似的橡胶棒的作用；类似地，玻璃棒接触气球之后有一步电荷传递到了气球上，因此，气球具有了和实验一中类似的玻璃棒的作用。

同时，由于我们在实验三中做出来了无论如何放置两个气球，都可以得到它们相互排斥的情形，我们猜测，这两个气球的整体，都带有同一种电荷。也就是，和磁极不一样，电荷好像可以独立存在，而不是每次都得在同一个物体上配成对存在。

这样，电荷分两种，电荷有两种，同种相排斥，异种相吸引，就很好地解释了这三个实验。

为了进一步搞清楚电荷是和磁极一样分开以后永远南北极配对出现，还是会出现只有其中一种电荷的情形，我们来做一下下面的实验。

我们还可以做一个非常粗糙的验电器：去两个金属箔，例如铝箔，剪成长条状，用金属丝固定好金属箔的中间位置，并且金属丝和一条橡胶棒相连。然后，我们用这个仪器来完成下面的来自于Einstein的《物理学的进化》一书的实验。实验一：选择一个摩擦过丝绸的玻璃棒，和验电器上的橡胶棒相连。我们发现，金属箔会张开。移开橡胶棒以后，金属箔仍然处于张开状态。实验二：选择一个摩擦过丝绸的玻璃棒，靠近，验电器上的橡胶棒，但是不相连。我们发现，金属箔会张开。移开橡胶棒以后，金属箔回到闭口状态。实验三：选择一个摩擦过丝绸的玻璃棒，靠近，验电器上的橡胶棒，但是不相连。我们发现，金属箔会张开。但后，剪开橡胶棒（或者，事先就是剪成两断的但是比较好地放在一起，在玻璃棒靠近之后，再把原来剪开的两断移开[1]）移开橡胶棒以后，金属箔保持张开的状态。

根据前面的实验，我们大概知道了，电荷有两种，同种相排斥，异种相吸引。于是，这就自然解释了金属箔张开的情形：张开意味着金属箔上的电荷是同一种。于是，反过来，我们也知道，只要金属箔张开了，则同一种电荷在金属箔上有分布了。这就是为什么这个简单的仪器叫做验电器——张开则有电荷分布。

于是，我们发现，实验一，就是电荷从带电的玻璃棒传递到了验电器，验电器上带了同种电荷，金属箔分开。实验二，就是玻璃棒使得验电器上的电荷重新分布，但是，都还没有离开验电器，玻璃棒上的电荷也没有传递到验电器，所以，两者靠近的时候，和玻璃棒上的电荷相反的电荷在靠近的地方聚集，在远离的地方另一种电荷聚集，于是两个地方的金属箔都具有同种电荷，张开。但是，当玻璃棒和验电器分开很远的时候，电荷重新均匀地分布在验电器上，于是金属箔不张开。实验三告诉我们，当两端聚集了不同的电荷的时候，验电器被剪开，则电荷保持在其中一段聚集了一种电荷的状态，于是，金属箔张开。因此，这更加确定了，电荷可以以其中一种类型的方式存在。

合起来，关于电和磁，我们通过实验和对对比实验的分析得到了：磁极分两种，同种相排斥，异种相吸引，两种磁极不能单独存在而是必定同时存

[1]这个移开可能会带来新的变量，我们暂时假设移开不引入任何新的电荷

在于同一个物体上；电荷分两种，同种相排斥，异种相吸引，两种电荷可以单独存在于一个物体。

那么，电和磁看起来好像啊，它们两之间有没有联系呢？没准电就是磁，磁就是电，产生条件，存在形式，表现形式有不同而已？这个问题，我们留待以后研究。

通过这几组实验，以及从这几组实验总结出来电和磁的以上的规律的过程，我们希望每一个人都能体会到，物理学就是在实验现象的启发下，构建能够解释这些现象的数学模型和概念模型，然后，中间的计算和推理很大程度上需要依靠数学的语言，并且最后，得到的数学模型和概念模型，甚至经过进一步的计算和推理得到一些对于其它实验的结果之后，还要接受实验的进一步检验。同时，我们尽可能保持引入的变量的数量，理论的复杂性，足够的小，用最少的假设来解释尽可能最多的现象。这就是物理学。

10.3 电流

电荷的流动，测量，单位

10.4 电压和电阻，欧姆定律

水流的类比，电阻的经典杂质散射模型

10.5 电功率和电功

10.6 串联电路

10.7 并联电路

10.8 推荐阅读材料

10.9 作业

10.10 本章小结

第十一章　温度变化和吸放热

11.1　温度和温度的测量

11.2　吸放热

当我们把不同温度的水直接倒在一起或者通过容器（例如把一铁杯子的热水放到另一个更大的装了凉水的玻璃杯子里面）相接触的时候，我们会发现温度高的水的温度会变低，温度低的水的温度会变高。同时，我们的手掌在接触比我们体温高的水杯的时候，我们会感到热。甚至，我们也见过在热水里面把鸡蛋煮熟。这说明，热好像是一种东西，可以从一个物体传递到另一个物体。同时，传过来之后呢，还可以用来干点事儿，而且是干点需要能量的事儿，例如让我们更温暖，让鸡蛋变熟。由于其能够传递，还大概属于一种能量的原因，历史上，人们把它叫做热量，热能，或者简单成为热。

如果你还见过烧水的时候水蒸气把锅盖顶开的现象，你大概还能猜出来，这个时候，可能这种叫做 “热量” 的东西，是不是提升了水蒸气的速度，而这个速度更大的水蒸气从水里面脱离出来的时候顶起来了锅盖。历史上，瓦特，就从这里提出了这样的一个发现——热量，通过水蒸气的形式，可以转化为推动物体运动，并且进而提出了蒸汽机的设计。

反过来，如果你在冬天试过摩擦生热——快速地摩擦两个手掌可以稍微提高一点手掌的温度，或者试过在水泥地上拖动一块橡胶，或者见过木工师傅锯木得到的温度比较高的锯末，或者见过刚经历过长下坡的冒烟的

刹车片（你可以自己用自行车试试，或者，去问问司机师傅为什么在长下坡的之前要给刹车片准备凉水）大概就会知道，运动大概也可以以某种方式转变为热量。

那么，热到底是不是一种物质呢，还是说，是物体的一种类似于运动的状态呢？从传递来看，好像很像一种物质，从运动速度和热量之间的转换来看，又很像运动速度这样的状态。

当我们用火加热水的时候，我们可以测量到水的温度不断地升高，直到发生沸腾。注意，发生沸腾时候的水会保持温度不变。稍后我们会回到这个持续吸收热量但是温度不变的场景。那这个时候，水的温度确实是升高了，水的质量呢有变化吗？如果说，水接受到了从火里面传过来的一种叫做热的物质，按道理，水的质量应该变大。

当然，也可能是热这种东西不溶于水，测量水的质量的时候其实侧不到额外增加的这份属于热的质量。但是，问题是，我们确实从水之中就能感受到温度的升高，也就是说，更可能热是溶于水之中了的。另外，当我们倒掉了水，那我们也就感受不到这份可能不溶于水的热了。也就是说，一个更简单的模型，水和所谓的热是完全混合了的，不可分离的，除非再想办法让这个热从水之中传递到其它物质里面去。

既然这样，那如果热是一种物质，则我们就应该能够测量到整体合起来的水的质量的增加，也就是温度越高的水的质量越大。我们来测量一下试试。

我们发现，温度高的水的质量并没有增加，至少在实验仪器的范围内，我们明显地感受到了温度的升高，但是没有测量到质量的增加。

因此，更加可能的解释是，热，和运动速度一样，是物质的一种状态。真的要从根本上检验热是不是运动，就要从下面两个角度来作进一步得研究了。第一，看一看，运动形式的能量，也就是动能和势能，是不是可以转换为某种质量不变得物质的热能，也就是其温度的升高，以及反过来，看看热能是否可以转化为运动，也就是某种物质温度降低，可以造成它自己或者其它物体的动能或者势能。第二，看一看，承载热能的物质，是不是其实也是承载运动的物质，而这样的承载物质的运动的快慢和这种物质的温度一一对应。第二点的检验在初中阶段稍微有点困难，在本书中我们留到高中部分。但是，在实际教学中，我们鼓励老师们从相应的高中部分的学

习材料尤其是实验设计中拿出来，在合适的条件下，放到初中部分来学习，让学生体会一下温度和分子的平均平动能的关系。下面，我们主要从第一点开考虑热能和运动的关系。实际上，历史上，这是由一批科学家来慢慢摸索着完成的。科学家们一开始，也更倾向于认为热是一种物质，一种可以在物体间流动的物体。

11.3 机械能转换为热能

11.4 热能转换为机械能

11.5 热能是什么？

分子运动，无序能量到有序能量

11.6 不改变温度的吸放热：相变

11.7 推荐阅读材料

11.8 作业

习题 11.1 (温度能相加吗)**.** *参照之前密度的习题，编制温度相加的习题，同样注意质量可以相加，热量可以相加，但是温度不行（除非质量相同，热量相加，导致温度相加的效果）*

11.9 本章和本卷小结

第二部分

高中篇

第十二章　从直线上到平面上物体的运动

–

12.1　匀加速直线运动

$x-t$ 函数、$x-t$ 图、现实、$v-t$ 函数、$v-t$ 图之间的转换。

12.2　平抛运动

$(x,y)-t$ 函数、$(x,y)-t$ 图、现实、$(v_x,v_y)-t$ 函数、$(v_x,v_y)-t$ 图之间的转换。

12.3　运动的合成和分解

12.4　推荐阅读材料

12.5　作业

12.6　本章小结

第十三章　力，力和运动

13.1　受力分析

13.2　力的合成和分解

13.3　$\vec{F} = m\vec{a}$

力和运动关系，也就是运动定律的合成和分解

13.4　从具体的力的测量、单位到一般的力

力的定义?

13.5　推荐阅读材料

13.6　作业

13.7　本章小结

第十四章　从简化版天体运动的数据到牛顿第二定律、万有引力定律和微积分

14.1　真实天体运动数据和大概的发展历史

14.2　简化版天体运动数据

今天，我们把天体运动简化为引力作用下的圆周运动，“造出来”一堆观测数据，来重新发现牛顿第二定律、万有引力定律和发明微积分。将来，我们在大学阶段，会从真实数据中，再一次重新发现牛顿第二定律、万有引力定律和发明微积分。

14.3　重新发现牛顿第二定律、万有引力定律和发明微积分

14.4　从经典物理学的发展历史看物理学

14.5　推荐阅读材料

14.6　作业

14.7　本章小结

第十五章　机械能和机械能守恒

15.1　自由落体运动的势能和动能

完整地计算出来

15.2　平抛运动和势能，矢量分解

15.3　机械能守恒的条件

15.4　机械能守恒应用举例

15.5　更一般的能量守恒

不发生质能转换条件下的能量守恒，本质上是一种能量必定和一种运动相联系，找出来那个运动的效果，就能守恒。

质能关系。

15.6　推荐阅读材料

15.7　作业

15.8　本章小结

第十六章　动量和动量守恒

16.1　动量守恒的条件，矢量分解

16.2　动量守恒应用举例

16.3　受力分析、能量守恒、动量守恒解题综合运用

16.4　基于动量函数的力学形式

受力分析的困难之处
用能量函数替代受力分析

16.5　推荐阅读材料

16.6　作业

16.7　本章小结

第十七章　匀速率圆周运动

17.1　匀速率圆周运动的加速度和力

17.2　假想离心力——没有维持这个加速度的力会怎样

17.3　天体的粗糙的匀速率圆周运动描述和引力

17.4　推荐阅读材料

17.5　作业

17.6　本章小结

第十八章　电磁学

18.1　库伦电场力，电场强度和电势

18.2　库伦电场线

18.3　磁力线和磁场强度

18.4　磁场中通电导线的安培力

18.5　磁场中运动带电粒子的洛伦兹力

18.6　法拉第电磁定律

磁场中运动的导体上的电动势，磁场变化产生的电动势

18.7 楞次定律

18.8 推荐阅读材料

18.9 作业

18.10 本章小结

第十九章　电路

第二十章　光学

20.1　推荐阅读材料

20.2　作业

20.3　本章小结

第二十一章　热学

21.1　推荐阅读材料

21.2　作业

21.3　本章和本卷小结

第二十二章　本书总结

22.1　推荐阅读材料

22.2　作业

22.3　展望你的和物理学的未来

参考文献

[1] 吴金闪. 教的更少, 学得更多 [M]. 科学出版社, 2021.

[2] Decartes R. Discourse on the Method (《谈谈方法》) [M]. Bartleby.com, 2001.

[3] 吴金闪. 《系统科学导引》第一卷 [M]. 科学出版社, 2018.

[4] 吴金闪. 小学数学这样学 [M]. 浙江人民出版社, 2022.

[5] 吴金闪. 中学数学这样学 [M]. 搜"吴金闪的书们"获取电子版, 待定.

[6] 吴金闪. 小学科学这样学 [M]. 搜"吴金闪的书们"获取电子版, 待定.

[7] 吴金闪. 小学语文这样学 [M]. 搜"吴金闪的书们"获取电子版, 待定.

[8] Newton I. The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy [M]. University of California Press, 1999.

[9] 牛顿. 自然哲学之数学原理 [M]. 北京大学出版社, 2006.

[10] Einstein A, Infeld L. Evolution of Physics [M]. Touchstone, 1966.

[11] Ausubel D, Novak J, Hanesian H. Educational Psychology: A Cognitive View [M]. Holt, Rinehart and Winston, 1978.

[12] Novak J. Learning, Creating, and Using Knowledge: Concept Maps as Facilitative Tools in Schools and Corporations [M]. Routledge, 2010.

[13] Einstein A. The Meaning of Relativity [M]. Benediction Classics, 2017.

名词索引

M | Z

M

Z

人名索引

插图

实验目录

举例目录

作业目录