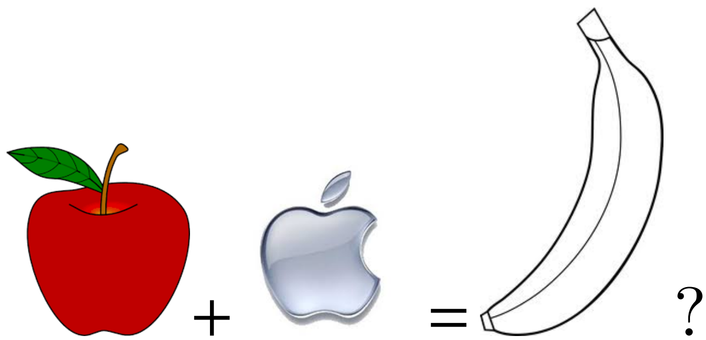
量子力学无基础入门

吴金闪



$$|\leftarrow_x\rangle + |\rightarrow_x\rangle = \sqrt{2}|\uparrow_z\rangle$$

通过学习量子力学来理解什么是科学

量子世界和经典世界到底哪里不一样

不学太多的具体知识，能做深入思考吗?

帮助学会学习和思考

思考意愿低的不适合读本书

2021 年 3 月 15 日

目录

献给

心儿、逸儿

致谢

本书是“读书人”推出的《量子力学无基础入门》课程的讲稿版。本书内容上受吴金闪的《二态系统的量子力学》、Feynman的《Feynman 物理学讲义》第三卷和Susskind的视频课程《量子力学》很大的影响。而其中的《二态系统的量子力学》在内容和思想上受到Ballentine的《Quantum Mechanics – a modern development》、喀兴林的《高等量子力学》、裴寿镛的量子力学课程、Affleck的高等量子力学课程非常大的影响。在这里一并对这些深刻地影响了我对量子力学的理解的老师致谢。

感谢读书人逼我来推出这个面向大众的量子力学课程，感谢学习了本课程的学习者们，感谢本课程的编辑和助教。

感谢我的孩子们，吴逸兮和吴立心，你们给我很多的学习和教学上的启发。感谢我的夫人冯倩对于我做各种探索的支持。感谢我的岳母姚书君对孩子们的悉心照顾，使得我有更多的时间来做这些探索并完成本书。

本书的电子版可以从网页“吴金闪的书们”找到。如果你是实体书的读者，需要输入网址的话，它是：http://www.systemsci.org/jinshanw/books。

前言

帮助更多人学懂量子力学是一个巨大的挑战。一方面，给物理系的学生开设的通常的量子力学课程需要复变函数、微分方程、原子物理学、光学的知识基础。另一方面，量子力学的科普呢，基本上跳过了这些数学和物理知识的要求，就会导致对很多概念的理解不到位。那么，有没有一种讲解量子力学的方法，能够在尽量少的数学物理知识的条件下，帮助学习者理解到位量子力学的概念呢？这就是本书的任务。

刚好，量子力学也是一个非常适合用来当做帮助学习者体会好什么是科学的课程。通过学习量子力学，可以体会到科学家（至少物理学家）思考哪些问题、如何思考，科学研究追求什么，到底什么么样的东西算科学。甚至，通过量子力学的学习还可以体会到我称为“理解型学习”的学习方法，通过在已知概念的基础上来批判性地建构新的概念的方式，来让自己的认知结构成长。

因此，本书、本课程的目标包含：量子力学的基本概念，尤其是什么是量子现象、什么样的量子理论可以解释这样的量子现象、这个理论和经典物理（量子力学之前的物理，例如Newton 力学）理论的最本质的区别到底是什么；从以上这些量子力学的基本概念的学习中，稍作提炼，帮助学习者体会好什么是科学；从这个基本概念的学习、什么是科学的提炼中，帮助学习者学会“理解型学习”。

那么，如何才能做到不太依赖于复变函数、微分方程、原子物理学、光学这些知识，就能大概把量子力学的基本概念，也就是上面那几个问题，学明白呢？其实，Feynman的《Feynman 物理学讲义》第三卷、吴金闪的《二态系统的量子力学》和Susskind的视频课程《量子力学》在这方面都做了非常好的探索。其核心思路就是，先学习量子现象，然后，通过尝试用经典理论来解释量子现象来发现，量子现象的解释需要新的数学结构，最后，基于二维空间的矢量运算、矢量和矩阵的运算的这套叫做“矢量代数”、“密度矩

阵”的数学来构建量子力学，从而解释量子现象。

量子力学的这样的学习方式，只要求学习者具有二维空间的矢量运算和矩阵的运算的数学基础。但是，其实，这条学习量子力学的路，对学习者的思维深度和进行深度思考的态度和习惯的要求是非常之高的。因此，本书和本课程所选择的这条路，尽管知识基础的要求比较低，但是，也并不适合所有人。请学习者自己来谨慎选择。

从结构上，见图 1，本书分成几个部分：第一部分，量子系统的行为和这些行为的可能的经典数学模型的尝试；第二部分，线性空间的矢量和算符、Dirac 符号，从经典概率论的密度分布函数到 Dirac 符号形式的密度矩阵；第三部分，量子系统的状态和测量，也就是用第二部分的数学来解释第一部分的行为。从整体思路上，第一部分是发展量子理论的动机，第二部分是数学物理基础，而第三部分是量子理论的核心。有线性空间知识基础的读者可以快速略读第二部分。剩下的纠缠态和量子计算主要用于开阔一下眼界。整本书，有一个主题贯穿始终，能不能用没有状态叠加原理的数学形式，来描述量子系统的行为，或者说，为什么量子系统的行为需要满足叠加原理的数学形式来描述。也就是说，你只要牢牢围绕着“状态可相加”来学习和思考，你就能学懂量子力学。

希望读者在学习完了本书之后，第一，了解量子系统的行为以及行为和满足状态叠加原理的数学形式之间的关系；第二，思考和建立初步的对物理学（或者说科学）和数学的关系的认识；第三，如果还能够对基于批判性思维和系联性思考的理解型学习有比较好的体会，就是额外有所得了。

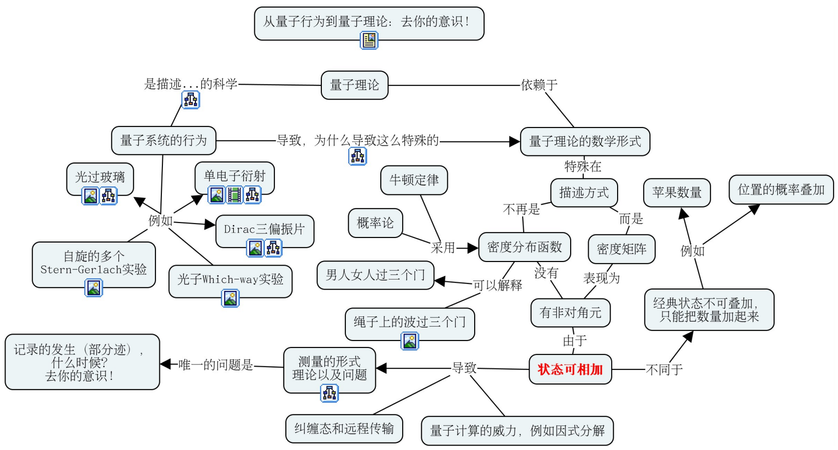


图 1: 本书的体系结构和大多数书不太一样，对于为什么量子系统的理论形式必须是基于矢量叠加原理（也就是“状态可相加”）的量子力学做了很多的讨论。因此，量子系统的实验行为以及为什么经典理论不能解释这些行为在本书里面也占了很大的篇幅，而理论部分从“密度分布函数”到“密度矩阵”的转变以及转变的原因占了核心的地位。通过这样的结构，我们希望读者除了了解量子力学是什么之外，还能够思考为什么量子力学会这样并对此形成一定的理解。注意，我们整个课程都是围绕“状态可相加”的意思，为什么需要“状态和相加”，“状态可相加”了就会怎么样，来展开的。

第一章　课程信息

注意，我们的科普的目的永远不是给大家介绍科学知识，而是希望大家来欣赏和体验一下什么是科学，也就是科学研究什么对象，问什么样的问题，怎么做这样的研究，科学家大概怎么思考，科学对世界和其他学科甚至对“读者我”来说有什么意义。

因此，本书的这一部分绝对不是废话，而是给大家做好学习具体知识之前的心理、知识和意识的准备，从而是的学习更有目的和更有动力。如果你仅仅想从本课程中获取一些科学知识，那么，本课程不适合你。请你选择退课，以及把本书也退货。

1.1　学习本课程的目的和所需要的基础

大家好，今天我要给大家讲的是量子力学，而且要做到基本上，你不懂得太多的数学和物理，就能差不多听明白，什么叫听明白呢？就是第一得知道量子力学它所描述的那些对象，它的行为是什么样子的。然后有了行为之后，我们去看这个行为，大概可以怎么去理解，所谓的理解，一会儿我会告诉你，其实就是你用一套数学去描述它，并且会算，算出来的答案和它的行为一样。那我需要做到的事情是让你明白现象是什么，用大概什么样的数学能够描述，以及为什么我们不用大家非常熟悉的经典力学，或者说一会儿会告诉你概率论来描述量子力学。

为什么要来讲量子力学这门课呢？直接的原因是因为大家对量子力学误解的程度实在太高了，比如说就有人说量子力学证明，人的意识和自然界的行为，和被观测的对象是直接相关的。甚至有人说这个东西表示，跟佛学，是比量子力学更加高级的学问。还有人说随着量子信息技术的发展，想去看一看量子信息技术到底是怎么回事，是如何能够帮助我们更好地，理解这个世界，或者有更好的生活。如果有这个好奇心，这也是一个学习量子力

学的动机。但是，实际上最最重要的事情，我想告诉大家的事情是从量子力学里头，我们可以体会到什么是科学，这一点比学任何其他的学科，都能体会得更好，而明白什么是科学，对于任何一个人来说，它真的具有一般的意义，因为科学原则上是解决，所有的能够描述现实，并且能够去改变现实的学问，原则上都应该是科学的事情。

也就是说我想明白这怎么回事，明白之后我想去看看，我能不能试着把它变得更好。换句话说，所有的事情如果你企图，将来总有一天需要它去指导你的实践，那么原则上这个问题，应该是个科学问题。当然，在现实当中，很有可能科学没有发展到那个地步，于是很多其实在指导实践的学科，它并没有完全的科学化，或者也是靠猜的、靠蒙的，或者甚至是靠信仰，你仍然可以用它来指导你的生活，指导你的实践，但这只是正说明科学在那个领域里头，它还没有发展到非常好的阶段，不表示它不是科学，原则上所有这样的问题都应该用科学的角度来回答，一会儿我会非常详细地，企图用量子力学突出什么是科学。

什么样的人可以来选这门课呢？我一开始在设计的时候，已经把基本上没有数学和物理的基础放在脑子里，可是实际上你会发现对于理解科学，任何一门科学来说，如果完全没有数学，我们是说不明白的，或者说你会觉得明白，但是你真的仔细去想一下你就发现，它不太容易明白。所以，我在这里，要求你基本上具有初中的数学水平，初中的数学水平表现在两个方面，一个是你要能往前多想几步，也就是说，比如说在数学做证明题的时候，你能往前做两条辅助线，比如说这是已知的，这是要证明的，你能中间构造三四个步骤，从这儿证明过去，这是对你思维的深度和质量上的要求。第二个你得知道什么是矢量，那什么是矢量呢？大概你在初中的时候学到过一些，比如说这是这个方向的，那是那个方向的，东南西北的，或者是什么这个斜的方向的，西北方向或者东北方向的，这个叫矢量。更一般的呢，就是在一个表盘上，那个指针指向任何一个方位，那叫一个平面的矢量，你只需要知道这么多就可以了，在数学知识上。

数学知识需求总结：矢量有方向和大小。

然后最好还是有一点点物理知识，如果物理知识完全没有的话，那么，第一也是知道其实运动是分成矢量的，这样一个概念就可以，然后听说过牛顿第二定律，你甚至都不用会算，听说过的意思就是说，你知道物体的运动是由力造成的，而力作用在物体上呢，会改变物体的速度。这个力呢，作用在哪个方向上，就会改变哪个方向的速度，知道这么多就可以了。当然，如

果我学过初中或者高中的力学，我不仅知道这么个概念，我还会算，那更好。但是，如果你实在不知道物理知识，那这就是最起码的要求。好，再说一遍，知道力是一个矢量，是分方向的，运动的、速度和位移也是个矢量，也是分方向的。然后知道牛顿第二定律，任何一个方向上的力的作用，它会改变那个方向上的速度。

物理知识需求总结：知道哪个方向上有力就会改变那个方向的运动的速度。

然后有人说我不仅会这些，我还基本上学过了大学一年级的数学和物理，那就特别好，我就完全不用担心你的数学不够，数学和物理不够，因为在我们这里头真的只会用这么点数学，就是矢量，然后，运动的矢量性、牛顿第二定律。

我也给小学生讲过这门课的重点的部分，就是现象的部分，以及这个现象到底为什么用经典的解释不了，只是不去讲将来可以去解释它的那个描述，数学描述是什么，也就是说跳过最后一部分之后，小学生他也能想明白，甚至我记得有个小学生就问我说，就是我们一会儿会做男人、女人过三道门的实验。然后有个小学生就说，为什么我们的光子是有这个实验现象的呢？而男人和女人是没有这个实验现象的呢？当然这个问题本身，一会儿我们会看到不是特别好，因为通常来说，科学家不回答这种"为什么它会有这个行为"这种层次上的为什么。我们一般来说只回答这个行为到底我们怎么去描述它，但是通过这个问题，我知道了这个学生真的是把这个现象，两个现象的区别搞明白了。然后呢，他只不过是后来问问题的时候呢，他企图去找这个现象为什么会有不同，而不是说描述它们这两套现象不同的数学会有什么不一样，这个不一样是由什么东西造成的。

那什么人不是我们这门课的对象呢？就是如果你真的只是为了学会几个名词，说将来跟人吹牛的时候，有更好的词，那么这不是我们这门课学习的潜在的对象，因为我们这门课的目标是使得你有些事情能想明白，以及明白什么地方想不明白，那这个要求是对你内在的一个驱动，也就是说你真的是为了满足自己的好奇心，对量子的现象感兴趣，或者是说我就特别想通过这个来了解科学家是怎么思考问题的，这些都是很好的目的，基本上我们能够达成。但是，你要懂得一些词，然后不知道什么含义，就拿去用，这是我们不推荐的用法。如何才能达成上面的目标呢？我们有几个要学习的具体的东西，通过学习它们，就可以实现自己的目标。第一个要学习的东西自然就是前面提过的量子的现象，以及描述量子的数学模型，以及为什么这个数学

模型会长成这德性。除了这个之外呢，剩下的问题更重要的事情是教会你一种叫做理解型学习的学习方法以及一种叫做批判性思维的思维方式。

什么是理解型学习呢？我先把这个词放在这儿，但是以后讲到具体的知识的时候，你会体会得更好，这个词叫做以学科大图景为目标的，以批判性思维和系联性思考为指导的，以概念地图为技术的理解型学习。那什么是一个学科的大图景呢？就是明白这个学科是干什么用的，也就是说你要问这个学科典型的研究对象是什么，典型的研究问题是什么，典型的分析方法是什么，典型的思维方式是什么。这个学科和整个世界以及其他学科的关系是什么，往往你会发现明白这个事情，比明白任何具体的知识要管用很多很多。当然，当你脑子里没有具体知识和没有具体研究案例的时候，你想明白这个学科大图景也是扯淡，不可能的。所以，一定要把知识和学科大图景结合，也就是说我们学习任何知识，原则上都不是为了学习那个知识本身，而是学会那个领域的研究者，他在想什么，他怎么想得，然后希望达成的目标是，有一天当我遇到也差不多和那个领域有关的问题的时候，我能把这个时候学会的这些思维方式用来解决那个问题。

至于批判性思维和系联性思考，进一步讲到具体内容的时候再解释。顺便会讲批判性思维和科学，以及系联性思考和科学有非常深刻的关系。数学和科学的关系，也会我们在这个课里头有所体现。也就是说你学习完这门课，我们希望你拥有的事情，最最重要的事情是一副眼镜，这个眼镜能够帮助你去看透这个世界，以及你去戴上这副眼镜，去看透这个世界的好奇和愿望，这是最最重要的事情。好，下面我们来介绍一下这门课所要学习的具体的知识上的内容。

学习态度和学习目标的总结：为了理解什么是科学，为了学会学习和思考的方法。

1.2 课程全貌

第一个是量子系统的行为以及这个行为和经典系统的区别。然后第二个，为了解释为什么经典系统描述的数学，不能来解释量子的现象，我们把经典系统的数学稍微地复习一下，其实也不叫复习，重新用另外一个方式表达一下，然后用这个方式来看看是不是能解释量子的现象。当我们发现它们不能解释的时候，那么问下一个问题，到底有了，在经典的系统的数学形式上，加上什么东西就可以解释了，那个加上的东西到底是什么，我们也会解

释这个加上的东西叫叠加原理，就是状态可以直接加起来这样一件事情。当然，你现在不用明白，大概这就是我们这个主要的目标。然后再往下，你一旦明白加上大概什么东西之后，下面的事情就是，好吧，我来试试把这个东西真的加到原来的数学里头，是不是真的可以解释这个现象了呢？这是课程的第二部分要解决的事情。我们的重点是放在前一个部分，对于绝大多数的听众来说，我们只要完成前一个部分就可以了，也就是知道量子的现象以及为什么经典的数学模型不能来描述量子的现象。但是，对于其中少数的这些听众，他有能力或者有这个意愿去搞清楚，到底这个态叠加原理是数学上长什么样，为什么加上之后就可以解释量子的现象，这是第二部分要完成的内容。

一旦完成第二部分内容之后，我们就可以继续来看一看，比如说类似于量子信息、量子计算，这里我取的一个例子叫做量子态的远程传输当例子，来看一看这些新加进去的数学是怎么帮助我们发现量子力学它奇特的地方，甚至在具体的场景当中，如何让这个奇特的地方发挥与众不同的作用。这张图是前面所说的主要内容的另外一种呈现方式，叫概念地图。就是你把各个重要的概念以及它们之间的关系画出来，在这里我们会发现，最主要的事情就是量子的现象以及量子的理论，以及为什么这个现象会需要这么一个量子的理论，下面会写下来告诉你说，有哪些量子的现象呢？实验一、实验二、实验三等等等等，以后我们会沿着这个具体实验展开。接着我们会告诉你，说这个实验现象到底在什么地方不能由经典的解释，那么这个解释在量子的里头会成为什么样，从中间你可以看到一个非常关键的词叫做相干叠加，或者说状态可加性。

关于这个状态可加性，稍微提前先解释一下，通常的加法加的是什么，所谓的状态可加性加的是什么。比如说我们可能一开始学数学的时候知道，通常的加法有苹果数量的加法、铅笔的数量的加法，这样的加法它加的是什么呢？其实它加的是事物的某种属性的量，它不是加的是事物本身。比如说，当我们把一个苹果加上另外一个苹果的时候，我们知道它是两个苹果。一个铅笔加另外一个铅笔，等于两个铅笔，这个时候我们其实是把所有的具体对象忘了，把它抽象成数，以后再做的加法。如果你懂得一点点集合论，你就知道原来带着东西的叫苹果的集合，然后，另外的叫铅笔的集合。现在呢，你不直接对集合里的元素做加减乘除，你加减的是什么呢？你加减的是那个集合的大小，所以一个苹果加一个苹果的时候，那个集合的大小变大了，所以叫两个苹果的集合。

如果我真的想要一个状态的加法，事物本身的加法，我该加成什么样呢？就是有个苹果，加个苹果，它等于一个大苹果或者等于一个小苹果，或者按量子力学的说法，以后你在实验当中会看到它等于一个香蕉，这叫事物的加法，叫状态的加法。或者说如果我站在这儿，站在这儿，我把这两个状态加起来，我该是什么状态呢，你说我是不是用一下我初中所学的这个矢量的加法可以加，好，你可以凑合着试试，那也就说我以某个地方为原点，然后我把这个状态写一个矢量，我把这个状态写另外一个矢量，我把这两个矢量加起来，我有可能在那儿。你想想在现实当中，你见过你站在这儿和站在这儿合起来的效果，相当于站在那儿这件事情吗？这是不可能的。所以，通常的矢量加法也不是矢量状态本身的加法，位置本身的加法，而是位置所代表的那个值，是用来指代位置的那个矢量的值的加法。

还有一个稍微更复杂一点的加法叫做概率性的加法，回到我刚才说的站在这儿和站在那儿的例子，也就是说我既可能站在这儿，也可能站在那儿。同样的道理，你发现它和我站在遥远的那个地方完全不是一回事。所以，就算是概率的加法，它也是两个数量的加法，只不过它不是把这两个数量加起来，而是把这两个数量背后所指代的那个概率的值加起来，也就是说，如果我以 0.1 的概率在这儿，以 0.2 的概率在这儿，你问我，我以零点儿的概率在这儿或者在那儿，这个时候你是先把那个集合里的元素合起来，然后把每个元素的概率加起来。也就是说你永远不对这个集合里的元素真正做加法，要么是对这个元素的某种属性的值做加法，要么是对这个元素上出现的概率做加法。这个叫概率相加，或者是数量相加，也就是说通常的加法它不是状态的加法，不是事物的加法。

以后我们会遇到事物的加法，例子就是一个苹果加一个苹果等于一个香蕉，你现在想想会说这是不可能的，对吧？那我们以后会遇到，什么样的情况会使得你的世界，变成苹果和苹果加起来得变成香蕉，两个苹果加起来啪地一摁，它真的成了一个大苹果或者成了一个香蕉，这个加法是最最关键的事情。从这个角度来说，整个课程的目的就是帮助你看到这一点——量子系统的行为导致其数学描述必须允许事物的加法。

注意，这张课程鸟瞰图是有网络的版本的，在这个 PPT 里头，同样这个 PPT 也在网络上，我会把网络上的访问的网址发给大家，分享给大家，而且这个图是可以点击的，你看见里头有很多小小的符号，比如说一个图的符号，一个概念地图的符号，你点进去可以进一步展开，例如在这里就有什么是科学，你点进去就会进一步给你解释什么是科学。也就是说这张图，其

实完整地组织了我要讲的所有的内容，和整个这个 PPT 是完全等价的，一模一样的，甚至从某些信息的角度来说，这张图可以更好地使得你建立起知识之间的联系。顺便，这个就是系联性思考，也就是说当你学习任何一个东西的时候，你永远是把它找到它最合适的位置，什么叫最合适的位置呢？就是从概念上来说，跟它联系最紧密的其他的概念，然后像拼图一样，把它插到那个最合适的位置去。

上面的所有的具体的知识的内容，我说了对听众有很高的要求，对不同的人可能有不同的效果，哪部分到底适合什么样水平的人来学习呢？第一部分，量子的现象的部分是真的不需要任何基础的，只要你的思维的深度稍微的深一点，能够跟着我一起想下去。第二部分经典理论的数学形式，你大概需要懂得概率是怎么回事，懂得概率的均值是怎么算得，比如说举个例子，如果一个硬币它的状态是正面和反面两个状态，然后这个硬币是完全无偏的，你得大概明白差不多它以 $\frac{1}{2}$ 的几率会出现正面，以 $\frac{1}{2}$ 的几率会出现反面，这个明白就可以了。接着还要明白什么呢？就是我如果说去参加一个以硬币为基础的赌博，我说如果它出现正面，你赢一块钱，否则你输一块钱，那么这个时候你可以把那个均值算出来，这个均值就是 $\frac{1}{2}$ 乘上 1 加上 $\frac{1}{2}$ 乘上 -1，它等于 0。或者说如果那个 -1 我改成 -100，那就是 $\frac{1}{2}$ 乘上 1 加上 $\frac{1}{2}$ 乘上 -100 等于多少多少，你只要会算概率以及概率的均值，这么简单的数学就可以了。一般情况下，小学基本上就是明白的，为了保险起见，你有初中的知识的基础那就更好。

然后，如果你从这点关于概率的知识开始企图去描述量子，我会启发你说，这里头缺个什么东西。你领会到大概缺什么样的一项，那也不需要有太多的基础。需要基础的事情是真的那个缺的东西，也就是我们前面提的状态相加。你把那个缺的东西真的把它用数学表示出来，并且用来解释这个现象，这部分要求比较高，大概需要你高中阶段的数学、物理的知识，或者说如果你是初中的话，那你的数学、物理都学得比较好才行。然后我们会用前面学过的这些理论以及现象，来试着解释一下量子信息，比如说我举的远程传输的例子，这个时候就稍微地复杂一点，你必须把前面的这些都学会，才能听得明白，为什么量子的状态相加可以用来帮助你实现状态的远程传输，这是比较难的地方。

1.3 为什么不能只靠“讲故事”学懂量子力学

一个解决这个难题的方法是你本来就有大学一年级的数学、物理水平，那完全没有问题。那另外一个方法就是你真的把我前面所讲的这些都学会了，也就是说不管你是小学，还是初中的水平，你把前面的这部分都跟下来了，这也会没有问题。为什么一定要坚持这种数学和科学的讲法，而不是给你讲故事就可以呢？原因是因为量子力学真的理解它非常非常地困难，一会儿我会给你展示几个量子力学它本身的创造者说的关于量子力学的理解的说法，所以一旦不用数学，我说话就得非常地小心翼翼，我说的任何一句话，你都可能做多重的解释，而其中大概只有一种解释才真的是我所指的意思，所以没有办法，我只有用明确的符号体系去代替它，而不用自然语言来表达量子力学是什么。

当然你说我学完了，可能我也就知道了量子现象是什么，大概模模糊糊地知道了它不能用经典的数学来解释，后面的完全听不懂，那也没关系，你需要一种能力，这种能力叫做你把具体的我讨论的知识和问题忘了，但是抓住“我为什么要来讨论这些问题”，“为什么要企图这么做”，也就是说整体的思路如果你能把握，当然我说了这很难，因为一旦你不懂具体知识的时候，整体思路真的是件难的事情，可是也不是做不到。那么这个时候，你也有一个收获，这个收获是至少明白了物理学家是在做什么事情，怎么想得，那这个也是有意义的。这样的课程和一般的量子力学有什么不一样呢？一般的量子力学呢，要么就是用纯语言的给你讲故事，这个时候我说了，这个产生错误理解的可能性非常非常高。还有一种是正式的物理系的量子力学课，他们是怎么上的呢？它会告诉你，上来就告诉你波函数是什么，然后波函数和概率怎么建立起联系，接着告诉你这个波函数是怎么演化的，它的演化方程叫做薛定谔方程，如果有机会我们也会提到。

然后，你学了这个演化方程，又学了波函数之后，下面你干什么呢？给你一堆问题，这堆问题呢，你就去求解，薛定谔方程把那演化的波函数的初态给了以后，把末态求出来，然后去做测量，整个学会的是这样一套东西。学会这样一套东西以后，因为它是非常直接和正面的学习，而不是去构造一个逻辑的链条，让你明白为什么非得这样，所以呢，你能学得会，来一个量子力学的问题我就会算，可是我想不通这个理论到底告诉了我什么，这个理论到底为什么长成这样，为什么我不换一个以前我就知道的理论来解释。所以，我们的目标是不一样的。当然，如果说是真正的一门好的量子力学课，它应该这两个问题都解决，既教你薛定谔方程和将来怎么算，能够用它来解

决物理学本身学科的现象的描述的问题，还能让你明白这个理论为什么得长成这个样子，每一个计算都告诉了我们什么事情，这个理论有哪些地方是想得明白的，毫无问题的，有哪些地方是真的想不明白的，而且是可以想不明白的。

1.4 其他学习材料

除了听这门课之外，如果你想进一步的学习，或者有些你认为没有太讲明白的，想需要更详细的，如何把它自己想明白的，关于这门课的内容，有其他的学习材料，我推荐一下。第一个是我自己写的书叫《二态系统的量子力学》[?]，第二个是《Feynman 物理学讲义》第三卷 [?]，这两个都是非常推荐的材料。然后，关于学习方法，你也可以看一本我写的另外一本书叫《教得更少，学得更多》[?]。除了这门课之外，或者说这门课一定程度上，其实偶然地非常和另外一门课很像很像，"偶然地"是因为在我设计这门课之前，我并没有真的去仔细琢磨人家那门课，但是后来我设计完课程之后，我才发现其实在整个精神上和内容上都有非常非常相似的地方，那门课叫 Susskind《量子力学》公开课 [?]，这个你可以在网上找到，也非常的推荐，不过那门课是英文的。所以，从这个角度来说，我所讲的这门课只不过是使得那个英文的课能够让你更加容易地听懂而已。当然，你也会发现真正的，尽管知识的内容一样，但是为什么而教它，以及侧重点，以及对问题细致的解释还是有很多不一样的地方的。

这门课有一个简化的版本，其实也不叫简化，就是针对大学三年级以上的数学和物理水平的人讲的版本，叫《系统科学导引》[? ?]，里头专门有一节是关于量子力学的。然后，其他的学习材料，在需要它的时候，我会进一步提供。

1.5 量子力学只能被理解到哪里不能被理解

我们前面说了量子力学是一个连它的创造者都不觉得它是能理解的东西，那说这些话的人有几个呢？比如说据谣传，但是我确实在某书上见过这个说法，Schrödinger 快去世的时候，他说他这辈子最后悔的事情就是创造了量子力学。Schrödinger是方程的创造者，整个量子力学的缔造者之一。还有人拿着这个问题去问Feynman，Feynman说如果大家说，有一个说法叫做

相对论没几个人搞得懂，然后，当年另外一个科学家，大概是还是谁说，全世界能够搞懂相对论的人就是两个半，他说他自己算半个。Feynman就拿这个例子来做对比，他说如果说相对论是两个半搞懂的话，那么在他发表出来之后，后来就有 12 个或者更多的人搞懂了，当然也不是特别多。但是，你把这个问题问量子力学，他说他不相信有任何一个人是搞懂了量子力学。

量子力学的另外一个缔造者是怎么说的呢？他说“如果你没有被量子力学痛苦（震惊）过，那么你就是完全没有明白量子力学”[1]。我的量子力学的启蒙老师 name: 裴寿镛是怎么说的呢？他说“不学量子力学，你的人生是不完整的”。然后，我这门课的副标题就是这个，就是“给你一门量子力学，让你的人生更完整”。所以，我们下面要做的事情就是让你跟我们一起痛苦，一起面对特别困难的问题。然后希望我们讲完之后，能够解决你的一部分痛苦，然后承认另外一部分继续可以痛苦下去，这就是这门课的目标。那这样的学习方式和通常我教你一堆知识真的是不一样的，我管它叫体验式、创造式、启发式的学习，也就是说你会跟我一样，一起来学着当年的这堆创造者们，一起来面对量子力学的问题，一起来问这个现象到底是什么，为什么这么奇怪，我到底怎么描述。这件事情非常地不容易，我们看看效果。

1.6　薛定谔的猫

在讲真正的量子力学知识之前，我把所有的量子力学是什么，给你用一个特别简短的例子先告诉你。最著名的例子就是一会儿我要讲的光过玻璃的例子，还有你可能听说过的薛定谔的猫的例子。这个简短的例子我们先讲，完了之后，我们会花一段时间来学习一下最基础的数学，接着再回到更多的量子的现象，为什么它们是不能解释的，因为这时候有了基础的数学之后，你能更深刻地体会到为什么不能解释，最后我们再来说真正解释它的理论大概长什么样，然后，最后的最后我们会说我们已经有了这个数学描述了，我们来看一看类似于量子状态远程传输这种量子信息，和量子计算的现象是怎么理解。

薛定谔的猫，它对比的对象是硬币，一个硬币它有正反两个状态，那么就算你把这个硬币变成一个很多很多面的，甚至变成连续的状态，也就是比如说你把十个硬币捆在一起，那么这时候它的面就有可能是第一个向上，第二个向下，第三个向上，第四个向下等等这种组合。它只不过是一个具有更

[1] ”Anyone who is not shocked by quantum theory has not understood it

多的状态的一个分布函数，也就是每个这个状态上它都会有一个概率，那么就算是连续的呢，比如说一个 x，这个 x 从 -1 到 1 都是可以连续取值的，那么它将来呢，只是在每个 x 值的情况下，有一个小小的概率，其实概率不是一个准确的词，有一个小小的概率密度，但是无所谓，你就先把它按照概率去理解。那么，这样的东西有个什么特征呢？这个特征就是不管它概率长什么样，我如果对它做一次观测，我只能得到一个确定的值，也就是说，比如说现在有两个硬币，两个硬币它的状态我不知道，但是我只要打开盒子一看，我知道这两个硬币必然是，比如说两个都向上，或者两个都向下，或者这个向上，这个向下，或者这个向上，这个向下，反正这四个状态之一。那这件事情本身呢，如果你仔细想的话，其实还挺奇怪的。因为一开始这两个硬币，我们不知道它是什么状态，打开之后呢，它就成了一个确定的状态，尽管那个确定到底确定到谁身上，那四个里头哪一个，我不知道，可是它肯定是一个确定的状态，一会儿我们再来说这件事情到底是怎么理解的，先把这个放在这儿。

薛定谔的猫是什么东西呢？它是说类似的，你把猫呢，连着一个会发生量子衰变的一个仪器，只要它衰变了呢，那个猫就死了，它就会放出毒素，如果不衰变，那个猫就是活的。现在问，如果你打开会发生什么呢？那个猫要么就是死的，要么就是活的，这不神奇，对吧？你可以把这个猫看成一个硬币，也就是说如果这样来看的话，你完全可以用硬币来描述薛定谔的猫。但是，神奇的事情是什么呢？你接着逼问自己说，在你打开之前，那个猫处于什么状态？如果它真的是个猫，它肯定是跟硬币是一样的，于是你就问自己，一个硬币放在这儿，它可能正面，可能反面，在你打开那个盒子之前，你觉得那个硬币是个什么状态？那个硬币肯定在那之前，它就已经是要么正面，要么反面的状态了，这就是硬币。也就是说你扔一个硬币，再把它盖住，在你打开你的手之前，那个硬币的状态已经确定了。这样的解释，这样的关于随机现象的理论叫随机现象的确定性的解释。

为什么会出现随机呢？是因为我们信息不够，就是说我们抛这个硬币，并且盖住的这个过程，有太多的信息，你的脑袋是抓不住的，但是原则上它是确定的，因为如果它是个万能的上帝，它是知道所有的风的情况，引力的情况，以及你手盖过去的那个角度，它的状态到底正面、还是反面向上是完全确定的，你只要按照这个理解，那么打开看这件事情呢，它不做任何行为，因为在你打开之前，它已经被确定了它是向上或者向下的。这个确定性，加上信息不完整的解释，是你觉得最舒服的关于经典现象的解释。那么我们想

想是不是将来那个连着一个衰减的量子，衰减的仪器的那个猫是不是也可以这么解释呢？如果可以，那就没什么可奇怪的。所以，在我真的介绍数学之前，我已经把所有的量子力学告诉你了，告诉你的事情就是说，如果它将来所有的对象都像硬币一样的话，那么丝毫没有任何问题。我们下面要告诉你的事情就是，哪些现象它长得不像这个硬币这样，不像硬币这样，我们又可以怎么解释，是不是稍微拓广一下经典的数学模型，换一个解释，我就可以来描述量子呢？还是说我整个数学都得变？我下面要给你们讲的具体知识，只不过就是我这里给你们介绍的什么是量子力学的具体例子的展开。

1.7 费曼的三个秘密

好那下面所有的信息都是告诉你，到底哪些现象会看起来超过一个硬币所能描述的范围，而硬币呢是非常舒服的，确定性的现象加上信息不完整导致的。除了具体的知识，我们再来说一下学习量子力学更加一般的意义，我这里分享Feynman所说的三个事情，第一个事情叫做，Feynman自己管它叫学习物理的小秘密，他说**物理学得越高，就越“Advanced”，就叫高好了，那么它其实就越简单**。什么意思呢？就是说你在比较基础的物理学习的时候，你会发现物理太复杂了，有很多很多的数学公式，有很多很多的概念。但是，你越往上学，你会发现它的概念越来越少，它的数学公式越来越少。那当然现在还没有实现整个一个公式就解释所有的物理，但这是我们的梦想，就一个公式，一个概念包含所有其他的东西。没准有一天会实现，已经非常接近了，就剩下引力了。那么，另外两个Feynman分享的学习的技巧是什么呢？第一个，他说**对于学习知识来说，你千万不要满足于知道那个东西的名字，而是得知道那个东西它本身是什么，而本身是什么要从这个东西和其他东西的关系里面得来**（后面关于关系的半句是我补充的）。当年，这个故事，在他自己的书里是这么分享的。他说有一个小孩儿给了他一只鸟的图，就问他这个鸟是什么鸟。然后Feynman说我不知道，那个小孩说：哇，你爸爸怎么什么也没教你，然后Feynman就说其实我知道名字，但是我拒绝回答这个问题。我的爸爸是怎么告诉我的呢？我爸爸告诉我说这个鸟在英语，比如说叫什么什么，在日语叫哇卡哇卡，在中文叫什么莫沙莫沙，等等一堆名字。他说，现在就算这些名字你都知道了，你知道这个鸟的什么吗，你还是什么都不知道。如果你真的想知道这个鸟，你怎么办？你去看看那个鸟它在做什么，它吃的是什么，它跟什么样其他的鸟是竞争关系，它跟什么

样的鸟是朋友关系，它跟什么样的鸟又比较像，这时候你就把这个鸟定位在整个生态当中，又明白它和自然的关系，这个就是知道一个东西的名字和知道一个东西是不一样的。

同样的，我也想分享一个我小时候的故事，我小时候就特别不懂事，老是说真话。其实，现在也是。有一天，有一个妈妈抱着她家小孩，抱过来说我家小孩能算 1 加 1 等于 2 了，特别自豪，我们就起哄说演示一下呗。妈妈是这么演示的，某某某 1 加 1 等于几啊，那小孩说 2，特别自豪。妈妈就这样转一圈，特别自豪，准备出去了。然后我那时候特别不懂事，就站起来说，我说某某某“1”是啥意思，“加”是啥意思，“2”是啥意思，“等于”是啥意思。然后那小孩挂了，因为那小孩大概我记得是两岁左右，确实是那时候能算 1 加 1，真的能算的话，还是很厉害的。但是，你会发现他是怎么学会 1 加 1 的？他学会的办法是，有人问他 1 加 1 等于几，他如果答了不是 2，啪打一下，答得是 2，给一块糖。这不是练小狗的方法吗？练着练着你就学会了。其实你仔细想“1”这个概念本身就不容易，它不是具体的数量的 1，而是指描述之于各种各样的东西，它都可以有一个单位 1。“2”是什么呢？两个在这种单位下的东西，比如说两双袜子。这是一个神奇的事情，两双袜子实际上是四只，但我们为什么叫两双，因为我们改变了单位。所以，数数这个事情本身就是一个，1 和 2 这两个数数的东西，本身就是一个非常深刻的东西。然后，“加”更加不知道什么含义了，“加”是把同样性质的东西合起来数一数，你只有明白之后，你就发现加法很简单，还是数数，因为同样性质的东西合起来数一数。接着那个“等于”是什么更复杂，你想如果你真的认为等于就是相等，我这么答，一加一等于几？等于一加一，这有啥错？所以，“等于”它其实还不是含义完全相同的意思，而是说含义要一样，但是呢，通常的结果要表示起来更简单，这叫等于。哇，你让一个两岁的小孩明白这个，你觉得能吗？我觉得我去教都不一定教得会，所以抱着一个孩子说，我知道 1 加 1 等于 2，那个就（像）是，跟那个有一匹马说，它会算加减乘除，对吧。那个故事就是讲它踢呀踢呀踢，它每踢一次就会等着大家爆出来的掌声，只要它听见掌声了，它就不再继续踢了。狗和马都是这么练出来的。

Feynman分享的第二个学习方法，也就是Feynman分享第三点，是什么呢？他说**用你自己的话举个例子说一说**，这个我就不展开了，这也是非常非常重要的学习方法。

我说这些是为了告诉你什么呢？就说你学习量子力学这个东西来说，它

真的非常具有一般的意义，你在学它之前，可能没想到这个“加”是这么深刻的一种东西。而只有学了它之后，你才会明白通常的加法和状态的加法真的是不一样的，然后你才会明白人类对于“科学到底是什么?”的这个底线到底在哪里，科学真的不是直接就告诉你这个东西是怎么回事，怎么样的，而是找到一个能够描述这个现象，算出来的结果和实验一样的一个数学模型，以及构建出来这样的一个模型的方法，也就是科学研究方法。而且，我们没有必要使得我们的模型描述的东西和你看见的东西真的是一模一样的东西，这个问题我们拒绝回答，我们只回答是不是你按照模型算出来的结果，和将来我做个实验的结果就是一样的。而这些底线上的挑战，你真的只有遇到像量子力学，这种你想起来就头疼，就不可能理解，很难很难理解的那些这样的问题，你才会意识到原来你对这个世界的绝大多数的认识，你大多数的学习方法和别人教你的东西，都是需要仔细地通过理性去重新批判，重新审视的。所以，不管是哲学家、教育家，还是科学家，还是数学家，都是非常非常有必要来学一下量子力学是什么的。

1.8 关于吴金闪

介绍完整个课程之后，稍微地来介绍一下我自己。我自己是物理学的背景，理论物理学，就是那个最没用的学问的那个学科。由于学习理论物理学，就一不小心学了很多很多次的量子力学，比如说在北京师范大学学过两次，在一个叫 SFU 的大学学过一次，在 UBC 的时候学过三次。其中 UBC 的三次中两次是物理学家教的，一次是数学家教的。场论忽略不计，纯粹量子力学这么多。那场论学过几门呢？大概学过三门、四门，所以我可能是迄今为止学量子力学次数最多的人。然后，有了这个不同的被教的经历，再加上我自己做一点关于量子力学的研究——忘了说我到底做什么的，量子输运、量子力学、博弈论、系统科学、科学学、教和学的研究等各种感兴趣的问题——有了这个不同的学科的研究的背景，再加上被教了很多很多次量子力学，我就更加地深刻地能体会到如果作为一个一般的人，也就是说不是一个专业为了研究量子的人，如果想来了解一下量子力学，他到底最关键的是什么，所以这门课就是按照我自己的成长的经历，研究工作的经历，然后重新地梳理出来的结果。

更多的关于我自己，再跟大家分享几句话，这个叫“Live to Make A Difference”，就是活着就是为了使得，就是为了做出点不一样。第二个叫

"Be Ambitious，Be Determined "，就是要有野心，而且要坚持去做，向着你认定的目标去做。第三个叫"World Spins on Dreamers Like You"，世界是因为你而转的，没有你它肯定没有转得像现在这么漂亮。"See Through Connections"，你要穿过这个联系，把事情看透彻。"Teach Less , Learn More"，教的更少，学得更多。那到底教得更少，怎么可能会学得更多呢？就是因为我们前面提到的理解型学习，也就是说我们不是为了学知识，学知识是为了体验到这个学科是研究什么的，大家是怎么想的。而学完这个之后，你自己再来学习其他东西，你就很容易地去拓展你的知识。"Learning for Understanding The World and Ourselves"，就是学习是为了理解这个世界和发现你自己，学习真的不是为了使得我将来去找一份好的工作。当然，如果它是我学习的副产品，那也是可以的。

顺便有另外一个，好像是加州理工 CIT 的一个开学典礼上的说法，一个教授说的，他说学习就是给你一个欺骗自己的理由。你觉得好像自己找到了人生目标一样，这就是学习最重要的目标，发现自己最善于干这件事情，最喜欢干这件事情，觉得我的生活有了目标，于是日常生活当中那种什么六点要起床，要开两个小时的车，每天回去还要做饭，还要接孩子等等所有的，还要被老板批，对吧？所有的这些东西全成了微不足道的事情，因为你有了足够欺骗自己的理由，说我真的是为了我喜欢的事情而在奋斗。最后一个叫做"不要教我事实，让我想一想，不要教我知识，让我自己去学习"。这个事情更多的是对教育者的忠告。这是真的，这个信息和知识爆炸的时代，我们是不可能把所有的知识教得完的，那我们需要教会孩子们的是什么呢？真的是去探索，去学习，去思考的方法。你记住这么多事实，是没有用的，所以我下面要给你讲的所有的量子的实验，都不是希望你记住量子实验的事实，而是用来体会为什么经典的不能解释这些实验。

另外，关于这个怎么教和怎么学的问题，如果你有兴趣，你可以关注一下一个叫"为理解而教和学"的公众号。

1.9　本章小结

这一章主要介绍了课程的内容，课程的目的，课程建设背后的理念，课程学习要求，从课程可以学到什么，以及课程主讲人的一些信息。

我们特别强调了从学习量子力学的过程中，体会到什么是科学，什么是数学，以及体会到理解型学习的学习方法。再次请我们的读者谨慎选择，本

课程对你的思维深度要求高，学习态度要求高，不一定适合你。当然，如果你决定留下来试试这个挑战，我们非常欢迎，也祝愿你真的从中学到东西。

第二章　量子力学初体验和数学准备

我们终于到了真的开始讲量子力学的具体知识的时候了。然后，通过大纲，你会发现，当然实际讲的肯定不可能跟设计的大纲的时间一样，但是你会发现我们会把主要的精力就放在下面所要讲的这四五个不同的实验上。好，我们来讲量子力学的第一个实验。

2.1　镜头——量子理论的第一个实验

第一个实验呢，需要你回去看一下你家的照相机的镜头，或者你的手机的镜头，现在大部分手机的镜头也是镀膜的，所以你能看得出来，它们是带颜色的。那为什么要给照相机的镜头镀上颜色呢？你想如果是个照相机，它肯定希望光进入的越多越好，当然有的时候，你想把某些光过滤掉，把另外一些光放进来越多越好呢，它会再加上个滤镜，或者镀一层特殊的膜，反正它的基本的方法就是加更多层的膜。

这事不对啊，为什么？你想让更多的光进来，然后你的方法是给它镀一层膜，实在不行，再镀一层膜，现在大部分复杂的镜头都是镀了很多很多层膜的，这真不对呀，为什么？因为每镀一层膜，它就增加了一个光的反射界面，这个是光的反射的时候就学过的，如果你还有印象，就知道是有一个东西叫反射率和透射率的，也就是说每镀一层膜，它透过去的光会更少，你如果没学过这个知识，你就设想一下，你家有一个什么筛东西的筛子，然后你说我给它加更多层的筛子，然后还希望它通过的沙子越来越多，这是不可能的事情。你每加一层这种过滤的装置，它总是要过滤掉一些东西，然后让透过去的东西更少。那这是怎么回事呢？画出来图就是这个，这个图就是一个玻璃，上面有一个入射光，这有一个反射光，然后这个入射光，它会继续到

达玻璃的下一层，接着再一次发生反射，最后透过两层反射界面的那个光呢，才是透射过这个玻璃的光。那实验上做出来，取决于这个玻璃的厚度，这个玻璃就是相当于我们现在的透射膜，取决于这个玻璃的厚度，它可以使得这个光以完全通过的形态，或者以最大反射的形态，最大反射的形态，假设比如说举个例子，假设我们每一层是 4% 是要被反射走的，那么它最大被反射走的状态，它可以做到 16%，就说 0% 和 16% 的反射光都是可以的。也就是说一层的时候，它是 4%，两层的时候可以做到 0%，这怎么可能呢？你按照这个筛子的经典模型想想，第一次过去，假设你来的是十个小球，第一次过去或者一百个小球，一百个小球过来了，其中平均来说 4 个要被反弹走，好了，跑走了，已经离开这个实验了，对吧？

然后接着呢，这些 96 个下来的呢，它要经过第二个界面的，第二个界面平均来说又是 4%，那约等于它还是 4，因为 96 乘以 4%，还大约是 4。好，也就是说大概来说一层 4% 的话，两层应该被弹走的是 8%，也就穿过它的大概是 92%。我这个计算没有任何问题吧？说我家有个过滤器或者有个水坝或者有个什么东西，每一层我赶走的是 4%，我问你两层赶走了多少？废话，那肯定是 100% 乘以 4%，然后 100% 再减去这个 100% 乘以 4%，然后我再拿它乘以 4%，每一层都这么衰减下去。完了，那越加更多的层，它透过的越少啊，怎么可能反射的是 0 呢？那这个实验真的是做出来的，它真的可以做到 0。一个做到 0 的可能可以怎么解释呢？它说大概是这么解释的，这个解释来自于经典光学，它说第一个透过去，一束光波照过来，照到这个平面上，它就分成两束，这儿弹走一束，这儿射下来一束，这个弹走的强度也是 4%，射下来这束，它会在另外一个表面上再发生一次弹过来，那么大约也是 4%。然后呢，它说这个出来的 4% 呢，它会经过上一个界面的时候呢，又发生这个透射和反射，那么忽略这个 4% 乘以 96%，也认为它还是 4%，其实已经略小于 4% 了，但是忽略这一点，那么也认为 4% 的话，也就是说我有两个光啊，都是沿这个方向的，一个是直接被弹走的，一个是出来之后再被弹走的。然后它说呢，你看你不是有一团这样的光过来吗？所以你在你的光路上，在这个点上，有一些是直接弹走的，有一些是从下面来弹走的，于是在这个点上，这两束光有可能会被相消，那光为什么会相消呢？它这个经典力学是这么说的，它说光不过就是一个波嘛，如果一个波峰这种形状，碰到一个这种形状的波谷的时候呢，你把它们俩一叠起来，它就是平的，所以叫相消。所以，为什么能够消呢？背后是牛顿力学。也就是说你如果拽一根绳子，拽的效果是你抖动绳子的效果是在这点上这么个形状，我抖

动绳子的效果是这么个形状，那么绳子最后表现出来的就是一个平的，这叫波的相消。好了，这就解释了，经典光波就解释了，为什么两层它反而增加了透射率。简短地说就是第一次被反射走的，它在这个点上有，然后同样的第二次被反射走的又透出来的，也会在这个点上有，因为它是一大束光波过来。然后这两个，因为它在同一个点上，它就消掉了，那消掉的能量要守恒，能量上哪去了呢？它说全被透过去了，好了，就这个解释。

这个解释看起来还不错，实际上我们在大学三年级之前，学的所有的解释都是这么解释的，后来有一天到了大学三年级学到量子力学，发现这个解释是胡扯呀，它怎么是胡扯呢？它说这样，我们现在这个仪器已经到达了非常高的地步，我们能够每次就打一个光子过去，那怎么验证它是一个光子呢？我们就用某种方式去探测这个光子的能量，我们发现小到一定程度以后，它就不可能再小了，所以它是有一个最小能量的。当然，这个最小能量跟光的频率，也就是光的颜色有关，这个细节我们不管，但是对任何一个给定的光，我们总是可以探到一个最小能量的，这个东西我们就叫一个光子。那既然它是最小能量，绝对不可能再分开的，对吧？刚才那个波的解释就错了呀。好，我们来看一看，把它看成一个粒子，也就是一个乒乓球，会怎么样，一个乒乓球，光现在是一个乒乓球，因为它是个光子。打过来了，它要么就透下去，要么就被弹走，对吧？因为它是一个，它不再分开了。假设它被弹走了，故事结束了，它不可能有任何其他行为了，它被弹走了，你还想干嘛。一个球打过来，吧唧，弹走了，你还想干嘛，你不可能发生任何事情啊，一会儿我找个乒乓球扔一下，看看会不会出现这样的事情。说弹走了这个事情，将来还会和底下那个发生的事情，两个事情叠加起来相消，不可能啊，为什么不可能？因为这两件事情是不可能同时发生的，一个乒乓球过来，它要么吧唧被弹走，要么下去以后，发生其他的事情，它不可能同时被弹走，又经过下面返回来，然后再把它俩加起来，它不可能。不可能同时发生的事情，你是怎么使得它们加起来又相消的？对吧，所以，如果我要解释得对，我的可能是就算一个光子它也会劈成两叉，这一叉从这儿走，这一叉从这儿走，然后在这儿合起来，这个已经被否定了，因为它是最小能量了。

或者我说就算它是直接这么弹走，第一个可能。第二个可能是这么上来以后，再被透射出去，这两个可能，就算它不可能同时发生，我仍然数学上，形式上要把这两个东西加起来。我如果允许我这么加，我这个事情就搞定了，也就是说它确实不可能同时发生，无论你怎么想，它也不可能把它加起来，但是你如果允许我加，我强行把它们俩加起来，它的数学就和我前面说

的这个波劈成两叉再合起来的是一模一样了，这时候就解释了现象。好，我们来总结一下，也就是说这个光过玻璃的事情呢，是可以通过经典波来解释的，而经典波是怎么解释的呢？说一串光波过来，劈成两半，这一部分被反射走了，这部分透射，透射完了，它又弹回来，又透射，在某个地方处在同一个点上，这时候同一个点上的振动，由于有牛顿力学，它可以把它加起来相消了，这是经典波的解释，但是它是依赖于一团光过来的。如果真的是个乒乓球经典的例子呢，我们发现它打到这儿，啪飞走了，或者穿透它再飞上来，它两个事情不可能同时发生，所以绝对不可能加起来。所以，经典波能解释我们观测到的现象，但是它不能用于单个光子的解释。而经典粒子呢，它不能解释这个现象。

那我们现在做的实验呢，真的是单个光子做的，那怎么办呢？按照经典粒子不能解释，它又不能做经典波的解释，因为它自己是不再分开的。那将来我们会发现，我们只需要做一件事情，这件事情就是不管如何，你允许我这两个不可能同时发生的事情，给它加起来，你只要允许我这么干，我在数学上就是跟经典波是一样的，我就得到了解释。我说的这番话，会有数学告诉你是怎么做的，但是这是我们所要学习的量子力学的第一个现象，光过玻璃这么简单的事情，它是一件非常非常神奇的事情。你家的镜头镀很多层膜会增加透过率，这是疯了的事情，但是实验事实就是确实透过，要不然你镀膜干什么。好，第一个实验我们就讲到这儿。

2.2 论什么是科学：为解释实验现象做铺垫

我们来想办法找一个这个现象的解释，为了构造这个解释，我们需要一点点数学的基础，这个数学的基础可以用逻辑思辨来代替，在目前这个阶段，一会儿我会告诉你逻辑思辨是怎么想的，如果你想用数学符号来算，它又是怎么表示的，怎么算的。

科学家一般情况下认为，什么叫构造出一个理论，或者提供一个解释呢？指得就是我知道了事物的状态，可以写成一个什么数学对象，这个状态会不会发生变化，变化的原因是怎么导致的，这个变化到它的原因之间是不是可以写下一个方程。完成这两件事情，就叫提供一个理论，那这个理论是不是对的，是不是科学的，怎么办呢？我们就去对这个理论的具体的情况说，一旦给了这么个初始条件，给了这么个环境的时候，它会发生什么事情呢？那我们下面就想办法来构造一下上面这个现象的理论的解释。

为了构造这个理论的解释，我们需要补一点点的数学，这个数学就是概率论。关于这个数学，你完全可以用逻辑思辨来代替，也可以写成数学符号来计算，下面我们会给你展示这个逻辑思辨以及数学符号这两种方式，以后我们会发现这些数学符号会使得我们的计算简单很多很多。那科学家认为什么样的东西是提供一个理论呢？一般我们认为提供一个理论，就是我们对状态到底写成什么样的数学符号，写成什么样的数学结构有了一个描述，然后状态是不是会发生变化，变化的原因是什么，建立起来了状态变化和它的原因之间的方程，比如说一个例子就是牛顿运动定律，它的速度的变化，也就是加速度是和力相互联系的，这叫一个方程。而它的状态，也就是速度或者位移是怎么描述的呢？是由三维空间的矢量描述的，那这叫做一个理论。那一个理论是不是科学的，怎么办呢？我们就把这个理论拿过来，针对特殊的具体的情况，说给这样的环境，给这样的初始条件的情况下，我们去拿这个理论做一番计算，算出来之后的那个可观测的现象，我们再拿来做实验检验，最后发现说真的给这么个初始条件，真的给这么一个环境的话，它真的会发生这个事情，这个可检验性，检验完了，就是科学的。

有一个在科学实践当中不怎么用，但是在科学哲学当中用的非常多的代替可检验性的东西叫可证伪的，那什么意思呢？就是原则上来说任何一个理论都是不可检验的，为什么不可检验？不可证实的，为什么不可证实的呢？因为你就算检验过了所有的具体例子，你理论的结果都对，也不表示对所有的例子，这个理论都对。比如说我做一个命题，这个命题是天下乌鸦都是黑的，然后我就去检验，我抓一只乌鸦检验黑的，抓一只乌鸦检验黑的，抓一只乌鸦检验，还黑的。然后呢？我能告诉你什么，我只能说我检验过的一万只乌鸦都是黑的，于是我可能产生一个推断，这个推断就是下一只乌鸦来，它黑的可能性非常非常高，可是它也绝对不可能否认下面的可能，你有些乌鸦就是没观测到。为了解决这个逻辑上的困难，也就是说任何理论原则上都是不可验证的，那一堆做科学哲学的人，提出了这样一个说法，说其实呀，只要是原则上可证伪的，又迄今为止没有被证伪的东西都被称为科学。那被证伪是什么意思呢？就是说我找到了一个例子，在这个例子的情况下，这个理论是不对的，这叫证伪。那一个理论必须是可证伪的，也就是说原则上我可以找到一个例子来证明我不对，这叫可证伪。然后迄今为止没有被证伪呢，就是到现在为止，我都没找到一个例子来证明我确实是错的，那这样的东西就叫科学。所以，天下乌鸦一般黑，迄今为止我们仍然可以认为它是科学，因为我现在检验过的，都告诉你是黑的。我迄今为止没有发现任何一

只乌鸦是白的，我不知道，没准真的有白乌鸦，我只是举个例子。

从这个意义上说，科学是什么呢？就是一个对状态对事物的描述的体系，这个描述一般情况下，还能建立起一个状态变化的方程，那么这样就叫一个数学模型，一个体系。这个体系呢，算出来的结果和迄今为止做过的实验的检验都是对的，而且原则上存在着其他的例子，这个例子呢，有可能它只要实验出现了某个结果，就可以证明我不对，可是这个例子一直没找到，那这个就叫科学。比如说有一些东西，它是不能算成科学的，为什么？比如说举个例子，上帝是存在的，我如果按照这个要求，如果想让它成为科学，它必须做什么呢？它必须先给我找个例子，这个例子就是如果下面的这件事情发生，那么上帝就是不存在的，也就是说找到一个能去证明它是错的这样一个例子，然后我们大家就一起齐心协力去找这个例子。如果一直找了好多年都没找着，那么这个时候，它就可以认为是一个科学。

如果不满足这个要求，则连科学都算不上。有一个非常著名的物理学家叫，他所说过的最著名的一句话，我特别喜欢的一句话，他说“你的理论竟然就不错”，他说“这个世界最糟糕的事情就是你竟然都不错”，所以是最糟糕的。也就是说你的理论必须原则上就允许是错的，只是迄今为止，而我做过的所有的实验，都没有把你否定，这个才是一个好东西。如果你说的东西，本来就该是对的，那它肯定是瞎扯淡。

顺便把这个状态的描述是什么，状态会不会发生变化，变化的原因是什么，这个东西叫做力学的世界观。也就是说大多数时候，物理学家面对一个现象的时候，我们都思考这几个问题，状态是什么，怎么描述的，我们能不能把状态的变化和某个外界的原因之间建立起某个联系，这个联系通常还表现为一个方程。然后除了这个可证伪性之外——也就是说实验、事实、理论，然后理论推出来的东西，得去允许有实验证明我错，但是我通过了检验，一直没证明我错——这个东西之外，科学还有一个稍微更高一点的要求，它叫系统性。

系统性是什么意思呢？就说我们希望绝大多数时候，不同的这个模型或者说不同的现象呢，可以呢，用类似的模型来解释，然后不同的模型呢，它们之间其实是有内部的关联性的，是有更基本的概念可以它们推出来的，这个系统性是科学的另外一个要求。也就是说我们希望用更少的假设建立起来一个理论，这个理论可以描述尽可能多的事情。第一个开创这种方法来描述，当然人家描述的不是科学，描述数学的就是。他把整个几何建立在最基本的几个假设之上，然后从那儿开始，就可以把各个定理都证明出来。这是

一件非常非常神奇的事情。如果你去看一下欧几里得的几何书，你就发现类似于比如说全等三角形的判定定理，什么边边边定理，边角边定理，什么之类的这些定理，它大概在三十五六条。也就是说他其实已经知道了作为平面几何来说，这些结论是该有的，可是呢，他又想建立起一个有系统性的东西怎么办呢？所以，他特别神奇的，真的，如果是靠猜，你想想这不可能，他猜出五六条，然后就能把那些该有的都推出来，这是不可能的。所以，它特别神奇的反向构造，也就是说我去找，我要证明的这些，比如说假设一百来条是我认为它就该有的，然后我怎么办呢？我去看看，我找到哪些中间产品，中间定理呢，是使得那一百来条都可以成立，然后再把这个中间再往前推，再推它的上一步的可能成立的前提，然后直到有一天他说我这么五六条放下去就够了，这是人类智慧的非凡的创造，极其了不起的创造。

这样一个系统性的视角，我不知道它之前有没有，但是就算有，也没有人把它做出来，只有他不仅有这个视角，而且把它做出来，这是非常了不起的。后来整个科学的发展，基本上就走了这样一条道路，前面的实验检验、数学计算，就叫批判性思维的道路。我不相信任何没有经过我自己的理性检验的东西，所谓理性检验就是要么是实验检验通过，要么是数学上能够证明或者能算出来。没有经过我的理性检验的东西，从来不当成我进一步思考的基础，这是科学的一个基石。还有另外一个东西就是系统化。有了这几样东西，才使得我们科学能够往前发展。我们今天要做的事情也是，企图对量子现象构造一个像这样的东西。状态有个数学描述，然后如果可以的话，状态的演化还会得到一个方程，然后接着就去算，对于具体的情况去算，比如说光过玻璃的我们算一下，一会儿我们要解释的别的实验我们也算一下，算一下之后发现，我算出来的东西和实验是一模一样的。而且，将来你会发现，我只需要三五个基本的概念，就可以把各种情况下的东西都算出来，也就是系统性。

2.3 概率论的基础：为解释实验现象做准备

好，那下面就开始学习，为了构建这个理论所需要的数学基础，经典概率论的线性代数表示，或者说经典概率论的矢量表示，这部分我说了，你可以不学，你不学呢，你只要在下面的实验当中，通过逻辑思辨去代替我所做的所有的计算，一般情况下，我也会把那个逻辑思辨的过程告诉你。但是，缺陷是你学到这个现象是什么，以及理解为什么理解不了之后，就不可能再

往下走了。你只有学会了这样一套形式数学的计算的方法，我才能继续往下走，告诉你，真的只要允许我将来加起来，我就能解释所有的一切了。所以，你自己去选择，对于不同的听众来说，你的学习的目标是不一样的。如果你能坚持，然后把这一段数学学明白，还会用，那就能保证后面的所有东西都学得懂。要不然呢，反正你就靠逻辑思辨。

整个概率论的数学，我们目前的阶段用的就是，在我们这门课里头用的就是叫做古典概型，也就是说，你的基础是一堆等概率事件，你只需要学会对等概率事件做数数，然后上面是个数出来的数，下面是另外一个数出来的数，这个百分比一求就是概率，只要这么简单就可以了。比如说一个例子就是，如果你是一个六面的色子，我问出现 1 的概率是多少呢？你就数满足 1 的面有多少，肯定只有一面，因为它是 $1,2,3,4,5,6$。那出现的所有的概率指的是什么意思呢？就是它各个面当中出现一面的是多少，它各个面有多少个呢？有 6 个，好了，所以它就是 $\frac{1}{6}$。具体这个概率是什么意思呢？它指的是如果你扔上无穷多次，比如说扔上几万次、几亿次，然后你把几亿次当中总共出现的那个面数当成分母，出现 1 的次数当成分子，那么除出来差不多就是 $\frac{1}{6}$。这个就是概率这个东西对于色子是怎么算的。然后，它的科学的含义，就指的是如果你真的拿个色子去扔的话，它从来不可能真的是 $\frac{1}{6}$ 的，但是随着你扔的次数越来越多，它会越来越接近这个 $\frac{1}{6}$。也就是说，科学真的只是提供一个可检验的、可测量的或者说可证伪的这么一个算出来的结果，我不保证你真的是一样的。这个概率就这么简单。

那剩下的概率和均值怎么算呢？之前我也举过了 $\frac{1}{2}$ 硬币的例子，现在我说凡是小于等于 3 的扔出来呢，我都赢十块钱，凡是大于 3 的呢，你赢二十块钱。那我说我们俩这个，你从我这儿赢走，我从你那儿赢来。如果我们俩是这么一个约定的话，这个平均收益怎么算呢？就是你看，扔到 $1,2,3$ 面的时候，我赢十块钱，就是 $10\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}$ 。接着我输的时候，就是 $(-20)\times\frac{1}{6}+(-20)\times\frac{1}{6}+(-20)\times\frac{1}{6}$。把两者加起来，就是我最后平均来说赢钱的均值，

$$P^1 = 10\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}+(-20)\times\frac{1}{6}+(-20)\times\frac{1}{6}+(-20)\times\frac{1}{6} = -5(\text{元}) \ . \tag{2.1}$$

所以，你只要小学水平的概率论就够了，这些是你完全就懂的，我们只需要这么多。

知道这么多以后，我们要学习的东西是什么呢？我们要换一套你现在看起来非常抽象的，完全看不懂的数学符号来写一下，下面我们就完成这个任

务。在完成之前呢，我们来稍微地说一下一点点概率论当中抽象的东西，叫做互斥事件。互斥事件是什么意思呢？就是说这个发生了，那个就不可能发生的事情叫互斥事件。比如说在硬币上，只要出现正面向上，就不可能出现反面向上，因此正反面向上叫互斥事件，只要出现正面 1 就不可能出现反面 0。所以，它有一条叫做互斥事件的加法，互斥事件的加法是怎么加的呢？就是如果我有一个大事件，这个事件是由两个互斥事件构成的，那么我这个大事件的概率，就是这两个互斥事件加起来。

这个事情其实比较复杂，因为你得去验证那两个事件真的是互斥事件，如果你懂得集合论的语言，就表示这两个集合是没有交集的。那如果你不懂，我就可以给你编出一些例子，好像看起来是互斥的，但实际上不是。比如说我可以说我扔出来小于 3，这个当成一个集合，然后奇数当成一个集合。我说我要么小于等于 3，要么是奇数的概率是多少呢？这个时候你千万不能把那俩概率加起来，为什么？因为奇数里头有小于等于 3 的，它会被重复计数。那重复了怎么办呢？你得还原到它的等概率事件集，（如果）说小于 3 或者（是）奇数的这个集合是什么呢？是 $1,2,3$ 加上 5 这四个数，于是你将来要算的是把这四个东西的概率加起来，所以是 $\frac{4}{6}$。而如果你直接去算的话，你想奇数是 $1,3,5$，所以是 $\frac{3}{6}$。小于等于 3 的是 $1,2,3$，有 3 个因此也是 $\frac{3}{6}$。那合起来就成了

$$\frac{3}{6}+\frac{3}{6}=1. \tag{2.2}$$

对吧？但是，它不可能等于 1，因为它不包含所有的事件：$4,6$ 就没在里面。所以，互斥事件这一点是很重要的，只有互斥事件的时候，它中间那俩概率才能加起来。但是，注意它是把那俩概率加起来，它不表示把那个事件加起来。

就算它是互斥的，比如说硬币的正面和反面，这两个事情是互斥的，我可以说硬币出现正面或者反面的概率是多少，算出来肯定是 1，这没有问题。但是，我绝对不表示硬币的正面或者反面意味着正面加反面的事件，就说硬币的正面这个状态加上反面这个状态，这是不存在的事情。

在经典的世界里头不存在一个状态，这个状态是“硬币的正面加反面”。硬币的状态只存在着一个集合，它是硬币的正面状态，比如说叫 1，并上一个集合硬币的反面状态，比如叫 0。数学上记做 $\{1,0\}$。不过，如果你不懂集合符号也没关系，这个符号你不用懂，只要知道意思就可以了：硬币的所有可能状态的总和。所以，硬币有“正面或反面状态”，没有“正面加反面状态”。“正面或反面状态”的概率是能被加起来的，这个是概率论的第一

条：互斥事件构成的事件的概率是分别每个事件的概率相加。把上面的意思写成数学符号就是

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), A \cap B = \phi. \tag{2.3}$$

如果你不懂这些集合运算符号，就跳过。这一行数学符号的意思就是“互斥事件（A, B，满足交集为空 $A \cap B = \phi$）构成的事件（$A \cup B$）的概率（$P(A \cup B)$）是分别每个事件的概率相加（$P(A) + P(B)$）”。你可以发现，其实 $A \cup B$ 就是把集合 A, B 合起来构成新的集合的意思，$A \cap B$ 就是把两个集合的共同的元素找到构成新的集合的意思，ϕ 就是里面没有任何元素的集合，称为空集。当然，我们也说过了，如果你决定就靠思辨，不希望运用数学运算来理解，那就跳过这些符号的学习。但是，数学不过就是用符号把你想说的意思说一遍，因此，强烈推荐我们的读者来学习一下这些符号。

概率论的第二条叫独立事件的性质，独立事件的性质就是如果我有一个基本事件是 a，有另一个基本事件是 b，然后两个事件发生不发生是完全独立的，这个时候 ab 同时发生的概率是什么呢？是 P_a，也就是 a 的概率，乘上 b 发生的概率 P_b，

$$P(ab) = P(a) P(b). \tag{2.4}$$

在这里，为了使得符号和概念更简单，我们用了基本事件 a, b 来表达这个独立事件的概率乘法公式。基本事件在离散状态的对象上，就是一个对象可以出现的最基础的事件。例如，硬币的正反面（也就是 $a = 1$ 或者 $a = 0$）、色子的六个面中的任何一个（$a = 1$ 或者 $a = 2$ 等等一直到 $a = 6$）。原则上，我们也可以用集合 A, B 来写上面的公式。不过，就要复杂一些。

我们举个例子来理解独立性。当我们扔两个硬币的时候，只要两个硬币没有通过什么方式绑在一起，则一个硬币的状态和另一个硬币的状态是独立的，相互不影响的。这个时候，两个硬币都正面向上的概率就是，

$$P(11) = P(1) P(1) = \frac{1}{4}. \tag{2.5}$$

这一条逻辑上也可以当做独立事件的定义，也就是只有满足这样的数学关系的事件 A 和 B，才叫独立事件。但是，往往在实际中，我们会对独立性基于实际问题的背景先做一个计算之前的判断，然后，再运用这一条来解决问题。例如上面没有绑在一起的两个硬币的状态。

公式 (2.3) 和公式 (2.4) 这两个公式是在概率论里头最基本的公式。好了，有了前面所说的等概率的基础事件，还有了独立事件和互斥事件，那我

们概率论整个逻辑思辨的基础就有了，下面我们教你数学符号是怎么回事。

2.4 概率论的 Dirac 符号

为了更好地描述概率，把经典概率和量子概率的数学描述完全统一，我来引入一个符号——Dirac 符号。这是整个课程里面最复杂的数学。但是，相信我，只要初中数学水平，跟着下面介绍的规则来算，你就完全能够掌握。至于为什么要学习这一套规则，以后遇到量子系统的时候你才能体会到。坚持把这些数学语言学会，你很快就能真的开始学习量子力学了。

我说凡是正面的，我就写个这样的向上箭头 $|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$。将来，我们会学习到，其实这个符号还可以拆开来看，其中的 $|\uparrow\rangle$ 叫做一个右矢量记号，也称作 ket；其中的 $\langle\uparrow|$ 叫做一个左矢量记号，也称作 bra。目前，我们只需要懂合起来的那个。合起来，$|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$ 就表示“硬币处于正面向上的状态”这个含义。

怎么代表向下的状态呢？就只需要把里面的向上箭头换成向下箭头，也就是 $|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$。

有了这套记号以后，干嘛用呢？我就能告诉你说，凡是你写下概率的时候，我以后就用这个记号来表达，比如说一个硬币的状态，按照这种符号怎么写呢？我就写成

$$\rho^c = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \tag{2.6}$$

读作：一个随机硬币的状态是，$\frac{1}{2}$ 的概率处于向上态，$\frac{1}{2}$ 的概率处于向上态。所以，更一般地，

$$\rho^c = \sum_s P_s |s\rangle\langle s| \tag{2.7}$$

有如下含义：一个系统处于每一个可能状态 s 的概率是 p_s，也就是这堆用括号和箭头包起来的东西呢，就是指它的状态是什么，前面那个数呢，就是这个状态的几率。这里的 ρ^c 称作状态密度矩阵。

如果你真的学过一点点概率论，你就会发现以前在教材上，它是写成一个大大的列表，这个列表就是向上的状态的几率是 $P_\uparrow$，向下的是 $P_\uparrow$，或者 1 的时候是 P_1，0 的时候是 P_0 等等一个列表。我只不过把这个列表写成了什么呢？写成了一个公式 (2.7) 的样子。所以，这里完全不引入任何新的理解，只是一个新的数学符号，也就是说它向上或者向下一定的概率，这件事情就写成公式 (2.7) 这么一个样子。

有了这个概率状态的表示符号，我们来看看各个状态的几率和相应的均值怎么算。

我们先来看均值。跟以前的情形一样，我们来做猜硬币的游戏，付钱的规则也一样。我们把之前算过的这套规则下我赚的钱的平均值算出来。这个付钱的规则，算平均值的规则呢，将来我们管它叫做算符。那它的这个规则怎么写呢？说如果我规定，向上的时候，我赢 1 块钱，向下的时候我输 1 块钱，那这个 A 怎么写呢？

$$A^c = 1 \cdot |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + (-1) \cdot |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \tag{2.8}$$

就是向上的这个状态右矢配左矢，减去这个向下的右矢配左矢，至于这个地方为什么是减呢？这是因为我要输 1 块钱。如果我变成输 100 块钱怎么办呢？我就把前面那个向上状态的系数写成 1，后面那个向下状态的系数写成 -100，

$$A^c = 1 \cdot |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + (-100) \cdot |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \tag{2.9}$$

所以，一般地说，一个支付规则就是，

$$A^c = E_s \cdot |s\rangle\langle s|. \tag{2.10}$$

其中 E_s 就是系统处于 s 态的时候，我收到的钱。如果这份钱是负的，就表示我在输钱。

有了这个算符 A^c 和我前面的这个状态表示的符号 ρ^c 之后呢，我怎么来算均值呢？

均值就是，把 A^c 和 ρ^c 这两个东西乘积起来，乘积起来以后，再去把它的对角线元素——Dirac 符号中那些出现在 $\cdot |s\rangle\langle s|$ 前面的系数就称为对角线元素，简称对角元——的和求出来。那对角线元素的和叫求迹 ()。计算乘积的时候，我们需要用到一个左右矢配对计算公式，

$$\langle i|\, j\rangle \triangleq \langle i|\,|j\rangle = \delta_{ij}. \tag{2.11}$$

其含义是说，如果一个左矢量 $\langle i|$ 遇到一个右矢量 $|j\rangle$，则其结果变成一个 0 或者 1：当 $i = j$ 的时候，$\delta_{ii} = 1$；当 $i \neq j$ 的时候，$\delta_{i\neq j} = 0$。我们来用这个规则做一个计算试试。

先算乘积，

$$
\begin{aligned}
A^c\rho^c &= (|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - 100\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow|)\left(\frac{1}{2}\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2}\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\right), &(2.12)\\
&= \frac{1}{2}\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2}\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\downarrow\rangle\langle\downarrow| \\
&\quad -50\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - 50\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\downarrow\rangle\langle\downarrow|, &(2.13)\\
&= \frac{1}{2}\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - 50\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow|. &(2.14)
\end{aligned}
$$

再来算对角线元素的和，

$$Tr\,(A^c\rho^c) = \frac{1}{2} - 50 = -49.5. \tag{2.15}$$

你会发现，按照你已经学会的概率求均值的知识，算出来也是 49.5。于是，我们发现，Dirac 符号的计算结果和之前概率求均值得到相同的结果。也就是，至少，在计算均值上，两套符号体系的结果完全相同。

求迹运算，也就是对角元的求和，还可以用下面的符号表示，

$$Tr\,(B) = \sum_{s} \langle s|\,B\,|s\rangle\,. \tag{2.16}$$

你可以验算一下，顺便也熟悉一下这套 Dirac 符号的计算规则。注意，其中最主要的规则就是公式 (2.11)。

我们已经验算了 Dirac 符号下得到的均值和概率均值是一致的。下面，我们来展示计算某个状态的概率怎么算，

$$P_s = \langle s|\rho^c\,|s\rangle\,, \tag{2.17}$$

$$P\,(S\,) = \sum_{s\in S} \langle s|\rho^c\,|s\rangle\,. \tag{2.18}$$

其含义是，对于基本事件 s，其概率 P_s 就是在状态密度矩阵 ρ^c 的左右两边分别乘上左矢量 $\langle s|$ 和右矢量 $|s\rangle$；如果时间 S 中有很多个这样的基本事件 s 就把算出来的每一个这样的基本事件的概率都加起来。

我们来做几个计算概率的例子。我们先算一下公式 (2.6) 的 ρ^c 情况下，硬币向上的概率，是否正好就是 $\frac{1}{2}$，

$$P_\uparrow = \langle\uparrow|\rho^c\,|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\,\langle\uparrow|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\uparrow\rangle + \frac{1}{2}\,\langle\uparrow|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}. \tag{2.19}$$

如果我们再算一下，硬币要么向上和要么向下的概率，就会得到

$$P_{\uparrow} = P_{\uparrow} + P_{\downarrow} = 1 \tag{2.20}$$

完全正确。更一般地，我们可以验证，对于公式 (2.7) 中的一般的状态密度矩阵，

$$P_s = \langle s|\rho^c|s\rangle = P_s. \tag{2.21}$$

这正好就是预期的结果。

好了，我们已经验证了无论是均值还是概率，Dirac 符号的计算结果和通常概率计算的结果，或者依靠你的自然语言形式的推理的结果，完全相同。

我们甚至可以进一步，来验证一下，Dirac 符号下，互斥事件的概率可加性，和独立事件的概率乘积，是否成立。但是，在这里我们就不再验证了。我们把它留给有心的学有余力的读者。

2.4.1 Dirac **符号和** 2×2 **矩阵运算，选读**

这一小节仅仅是为了已经懂得矩阵计算的读者写得。如果不是已经学习过矩阵计算，我推荐你要么依靠 Dirac 符号的计算，要么依靠自然语言形式的推理——也就是想明白。对于已经懂得矩阵计算的读者，把 Dirac 符号和矩阵的联系明确建立起来是有帮助的。对了，所谓懂得矩阵运算，在我们这里，只需要会 2×2 的矩阵的加法、乘法、求迹、求某一元素的计算就可以。

例如，对于 2×2 矩阵

$$A^c = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \rho^c = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix}, \tag{2.22}$$

我们有

$$A^c\rho^c = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}\rho_{11} + A_{12}\rho_{21} & A_{11}\rho_{12} + A_{12}\rho_{22} \\ A_{21}\rho_{11} + A_{22}\rho_{21} & A_{21}\rho_{12} + A_{22}\rho_{22} \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

其一般规则是

$$(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik}B_{kj}. \tag{2.24}$$

矩阵加法和求迹就不展示了。

现在，我们来建立 Dirac 符号和矩阵符号的联系。我们说，如果我们把矩阵看做是这样的 Dirac 符号表达式，

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\rightarrow\hat{A}=A_{11}\left|1\right\rangle\left\langle 1\right|+A_{12}\left|1\right\rangle\left\langle 2\right|+A_{21}\left|2\right\rangle\left\langle 1\right|+A_{22}\left|2\right\rangle\left\langle 2\right|,\quad(2.25)$$

则上面的矩阵乘法的计算正好就是公式 (2.11) 规则下得到的结果。我们来验证一下。

$$\begin{aligned}\hat{A}\hat{B}&=\left(A_{11}\left|1\right\rangle\left\langle 1\right|+A_{12}\left|1\right\rangle\left\langle 2\right|+A_{21}\left|2\right\rangle\left\langle 1\right|+A_{22}\left|2\right\rangle\left\langle 2\right|\right)\\&\quad\cdot\left(B_{11}\left|1\right\rangle\left\langle 1\right|+B_{12}\left|1\right\rangle\left\langle 2\right|+B_{21}\left|2\right\rangle\left\langle 1\right|+B_{22}\left|2\right\rangle\left\langle 2\right|\right),&(2.26)\\&=\left(A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}\right)\left|1\right\rangle\left\langle 1\right|+\left(A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\right)\left|2\right\rangle\left\langle 1\right|\\&\quad+\left(A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}\right)\left|1\right\rangle\left\langle 2\right|+\left(A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\right)\left|2\right\rangle\left\langle 2\right|,&(2.27)\\&\rightarrow\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{bmatrix}=AB.&(2.28)\end{aligned}$$

乘积以后得到的矩阵正好和公式 (2.24) 的结果完全一致。

我们还可以通过左右矢量配对运算规则来得到的某个元素，例如

$$A_{ij}=\left\langle i\right|\hat{A}\left|j\right\rangle=A_{ij}.\quad(2.29)$$

也就是说，求一个矩阵的某个元素 A_{ij}，在 Dirac 符号下就成了 $\left\langle i\right|\hat{A}\left|j\right\rangle$。

至此，矩阵计算语言，概率计算语言，概率靠想，Dirac 符号语言，完全就统一了。以后，我们绝大多数时候会使用 Dirac 符号语言，但是有的时候一不小心也会用矩阵语言。例如，所谓求“对角元的和”这句话，就是借用了矩阵的语言，因为只有矩阵才有对角元，也就是

$$Tr\left(A\right)=\sum_{s}A_{ss}=\sum_{s}\left\langle s\right|\hat{A}\left|s\right\rangle.\quad(2.30)$$

2.4.2 操作和测量

下面，我们来讨论对状态的操作和测量的数学表示。首先，还是从实际对象的实际现象出发。假设我们有一个真的随机的硬币，称为纯随机硬币。你先不要问我有没有真实的纯随机硬币。前面，我们已经学会了用数学来描述这个硬币的状态，以及计算某个支付规则下的平均值。现在，我们来考察如何描述改变这个状态的操作，以及如何描述对这个硬币的测量。

一开始硬币有一个状态 ρ_i^c，如果我们要去对这个状态做一个操作，比如说我要把硬币翻一下，这件事情的操作 A 和操作完了的末状态 ρ_i^c 我们怎么描述？为了描述这件事情，我们要引入一个东西叫做一个算符，一个操作。也就是说如果原来是正面向上的状态，我呢，要找到一个翻这个操作的一个矩阵或者说算符，这个矩阵正好对应着——凡是给我正面，我就把它变成反面；凡是给我反面，我就把它变成正面。你就想如果一个硬币是确定的，只有正面，它怎么表达，它的表达方式是 $\rho_i^c = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$，或者说 $\rho_i^c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。现在我们要把它变成一个向下的状态，向下的状态是什么呢？就是向上的概率是 0，向下的是 1，所以它是 $\rho_f^c = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$，或者说 $\rho_f^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$。现在我们怎么把一个这样的 ρ_i^c 变成一个这样的 ρ_f^c 呢，我告诉你，它的计算就是

$$\rho_f^c = A\rho_i^c A^\dagger, \tag{2.31}$$

其中这里的 A 是

$$\sigma_x = |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|, A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

$A^\dagger$ 称为 A 的复共轭转置，具体操作就是，

$$\left(A^\dagger\right)_{ij} = \left(A_{ji}\right)^*, \tag{2.33}$$

这里的 x^* 就是一个复数的复共轭，也就是 $(a+bi)^* = a - bi$。不懂复数的不要担心，整个课程中绝大多数时候，我们的 b 都等于零，于是这时候复共轭就是不变的意思。

这里，为了帮助大家熟悉这些符号，我们提供了 Dirac 符号和矩阵两种形式。将来，我们可能仅仅会采用其中之一。顺便，这里的符号 σ_x 称为。但是，现在，你只需要把它当做一个代表上面那个具体的矩阵的记号就可以了。

我们可以验算这个 σ_x 确实是翻转操作，

$$\sigma_x |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \sigma_x^\dagger = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, \tag{2.34}$$

$$\sigma_x |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \sigma_x^\dagger = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|. \tag{2.35}$$

类似地，我们引入保持原状态什么都不做的操作，单位矩阵，Identity

矩阵,

$$I = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

也可以验证，这个矩阵确实就是不翻的操作,

$$I\,|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\,I^{\dagger} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|, \tag{2.37}$$

$$I\,|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\,I^{\dagger} = |\downarrow\rangle\langle\downarrow|. \tag{2.38}$$

有了操作的一般定义公式 (2.31), 我们再来解决测量的数学描述的问题。

还是从实际对象的实际现象出发。我们发现，对于一个纯随机硬币来说，打开看了之后，硬币的状态就确定了，不管是正面还是反面。用数学语言来表示，这就是

$$P_m = \langle m|\,\rho^c_{bfm}\,|m\rangle\,, \tag{2.39}$$

$$\rho^c_{afm} = |m\rangle\langle m|\,\rho^c_{bfm}\,|m\rangle\langle m| \sim |m\rangle\langle m|\,, \tag{2.40}$$

其含义是，对于一个测量前状态 ρ^c_{bfm} 来说，测量完系统之后，发现系统处于 m 态的几率是 $P_m = \langle m|\rho^c_{bfm}|m\rangle$, 如果 $P_m \neq 0$, 也就是确实发现系统测量完了之后处于 m 态，则系统的测量后状态是，$\rho^c_{afm} = |m\rangle\langle m|\rho^c_{bfm}|m\rangle\langle m| \sim |m\rangle\langle m|$。

这里面有一个小小的技术细节：对于一个密度矩阵，通常，我们会先做一个归一化再来看其含义。对 ρ 的归一化就是

$$\rho = \frac{\rho}{tr(\rho)}, \tag{2.41}$$

因此，ρ^c_{afm} 直接算出来是 $|m\rangle\langle m|\rho^c_{bfm}|m\rangle\langle m| = P_m\,|m\rangle\langle m|$，但是，重新归一化一下就得到 $\rho^c_{afm} = \frac{P_m|m\rangle\langle m|}{P_m} = |m\rangle\langle m|$。

好，这就是所有的概率论所要学习的数学，第一个是状态是什么，状态是一个对角的矩阵。第二个是要测量的量怎么表达，就比如说我要给多少钱，就叫一个测量的量，怎么表达，也是一个对角的矩阵，每一个地方就是该付多少钱，或者说以一个叫做十倍放大镜的作用来看，我只要看到色子上显示是 1 呢，我记录的数就是个 10，2 就是 20，那个放大镜对应一个什么操作呢？就是 10、20、30、40、50、60，写在对角上。然后，将来它的平均值怎么算呢？平均值就是把 ρ^c 的矩阵和 A^c 的矩阵放在一起，把它先乘完，变成一个矩阵。然后把所有的对角元素加起来。加起来最后的结果就是 $P_1 \times 10 + P_2 \times 20 + P_3 \times 30 + P_4 \times 40 + P_5 \times 50 + P_6 \times 60$，这是你所熟悉的结

果。最后所需要知道的事情是，如果我将来需要有一个状态去操作它，操作怎么办呢，是 $AA^\dagger$，它的这个 “†” 怎么算呢？你就是去做一个转置，再做一个复共轭，不过在我们所要学习的里头复数基本上不会遇到，所以我们就直接做个转置就可以。

然后你怎么去验证这些例子是对的呢？我已经给了你硬币和色子的例子，你就自己去算一下。那迄今为止，我们就学会了形式上的所有概率论的计算，但是我再强调一遍，我们没有任何新的东西，所有算出来的结果和你以前知道的东西都是一模一样的。

那为什么非得写成这个样子呢？就是因为将来当我们跨过经典概率去解释量子的时候，我们发现我们的数学不需要产生任何变化，我们的数学是完全一模一样的。在经典现象本身而言，我们教你的这个数学，是比你通过你自己的逻辑推断、思考要更复杂的，当然也没复杂到哪去，对吧，只是你以前怎么算的，我现在告诉你写这个矩阵的模样，然后把它乘起来。再重复一次，你只需要知道这个就可以了：

1. 状态写成个矩阵放在对角上，

$$\rho^c = \sum_\alpha p_\alpha \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha\right| \tag{2.42}$$

2. 测量的东西写成个矩阵放在对角上，

$$A^c = \sum_\alpha \alpha \left|\alpha\right\rangle \left\langle\alpha\right| \tag{2.43}$$

3. 在状态 ρ^c 下对物理量 A^c 做测量，得到的均值怎么算：把它俩乘起来，乘完之后，把对角元素加起来，

$$\langle A\rangle_{\rho^c} = tr\left(A\rho^c\right) \tag{2.44}$$

4. 测量得到的可能的结果的概率和测量后状态，

$$P_m = \langle m|\,\rho^c_{bfm}\,|m\rangle, \tag{2.45}$$

$$\rho^c_{afm} = |m\rangle\langle m|\,\rho^c_{bfm}\,|m\rangle\langle m| \sim |m\rangle\langle m| \tag{2.46}$$

5. 怎么去操作这个对象呢？你把那个操作所代表的矩阵 A，乘在这个状态 ρ 上，再乘上这个操作的共轭转置 $A^\dagger$，

$$\rho^c_f = A\rho^c_i A^\dagger \tag{2.47}$$

6. 所有的计算只需要遵循这些 Dirac 符号之间的一条基本性质——“正交性”，也就是左矢量遇到代表相同状态的右矢量得到 1，遇到代表不同状态的右矢量得到零，

$$\langle\alpha|\,\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \tag{2.48}$$

这是一个完整的描述：既有状态的描述，又有测量的描述，又有操作完了怎么描述。

我们把刚才所有的这个学过的关于经典概率论的东西写在同一页纸上，那这页纸就是公式公式 (2.42) 到公式 (2.48)。所有的你要算的东西都在这页纸上，而且其中最最关键的东西，只有两个，一个就是如果你遇到一个左矢量 $\langle\alpha|$ 和一个右矢量 $|\beta\rangle$ 合在一起的，它等于 $\delta_{\alpha\beta}$，也就是任何经典状态之间，它要么是完全一样的，要么是完全不一样的，这一点非常非常的重要。也就是说一个硬币的正面，它只和正面一样，它和反面是完全不一样的，它们俩之间没有任何交叉。

在这里，所谓把它俩遇到一起的意思就是看看有多少交叉的意思。将来我们要改变的就是这一点。一个猫的死态和活态，它的死态和活态本身，确实也是完全不交叉的，但是它可以有死态 + 活态的东西，或者说前面的我们讲过的光的例子里头，它有第一次就弹走的，它有第二次就弹走的，对吧，在这两个弹走之间，它们本身确实是完全不可能同时发生的，完全不一样的，但是它可以存在的一些状态，这个状态可以把第一次弹走这件事情和第二次弹走这件事情加起来。这个例子不太好，无所谓了，有更多的例子的时候再回来。

将来我们会发现我们只需要改变这一条，允许 $\langle\alpha|\,\beta\rangle \neq \delta_{\alpha\beta}$，后面所有的都是不变的，我们就可以来解释量子的现象。

为了解释后面的更多的量子的现象的时候，还需要做一个小小的铺垫，这个铺垫叫做千万不要小看这个测量后状态。

首先我们也用这个逻辑思辨的方式，我说有一个硬币，它可能正面，可能反面，我一打开看它向上，我问这个时候硬币处于什么状态？废话，这个问题肯定是向上，这叫测量后状态。就是就算对一个随机变量，它一旦被测量了，在测量之后的那个瞬时的状态，我不管以后会不会有人翻它，我不管，在我没有任何其他的因素在跟它作用的情况下，它的状态就是所测量到的那个状态。所以，这是一件非常非常平庸的事情。对吧。你看马路上有个车，停在那儿被我看见了，那个地方有个车，那个车在哪儿？那个车肯定在我看见的地方，就这么简单一个事实，但是千万千万要注意这个事实其实非

常非常的深刻，一会儿我们再说它为什么深刻，但是这一条叫测量后状态。就说一般情况下，我们希望一个东西被测量完了，它正好就是我们观测到的状态，这件事情是我们希望做到的，如果这一条被破坏的话，我们很多关于这个世界的理解都会出问题，对吧，要不然怎么叫测量，测量不就是想知道它的状态是什么吗？如果说我测完了它的状态不一定是这个，我测它干嘛。但是，以后我们会挑战这一条的，非常深刻地挑战这一条的。

好，我们先把这个测量后状态也告诉大家。这个测量后状态到底怎么算呢，这个就是公式公式 (2.46) 要解决的问题。你只要按照这个方式去算，你得到的答案就是我刚才那个逻辑思辨得到的答案。你把 ρ^c_{bfm} 放中间，把测量到的状态左边、右边凑上去，你就会发现你只能留下来一个测量到的状态。

学这些数学就是为了将来我不再需要逻辑思辨来思考了。我把所有的东西都按照这套数学代进去，我就能给你答案。前面我们说的是对于要么是向上的状态，要么是向下的状态做的测量。那如果是一个 P 的概率向上，$1-P$ 的概率向下的呢？那这个测量出来的结果是什么，和我们的逻辑思辨，和我们的直觉是不是一样呢？你自己验证一下，你就会发现算出来的答案正好就是你以前觉得就该这样，比如说均值就是 $2P-1$。然后向上的概率就是 P，向下的概率就是 $1-P$，这些都是完全可以算出来的。

经过这个一般的公式，还有例子，以及它和逻辑思辨之间的等价性的论证之后，我们在这一页把所有的基本的公式做了一个小结。我还准备了这门课程的一个小抄，它是两页纸，也会发布在网上提供大家下载。本书也会加印一个活页。大家可以在听课的时候把那两页纸打印出来，或者拿着这个活页，然后有需要的时候就翻过去看一下，噢，原来这些东西是这样算的，然后你就可以更方便地知道，更好地理解后面真的需要到你算的时候的知识。

2.5 用这套符号来理解随机变量

有了这个数学描述之后，我们来讨论一个关于随机变量的，关于硬币的比较深刻、比较复杂的问题。我们想问的问题是，在我们测量硬币之前，硬币到底是个什么状态。这里有两种形式的硬币，第一种是每一个硬币它本身是两面的，一面是黄色，一面是红色。那第二种是这个硬币呢，要么是黄的，要么是红的。你把它看成硬币无所谓，反正乒乓球也是硬币。

好，那我说从你来，你的观测来反过来推这个随机变量的角度，也就是

说你先做一下实验，看看你会抽到什么，然后抽上几百次、几万次，之后你来猜，那个硬币的随机变量该怎么写，就是写成那个 ρ^c 该怎么写的角度。

我问一个问题，你能区分这两样硬币吗？来，我们来试试，我就做几次哈，几次肯定不准，但是试试。蓝色的，蓝色的，蓝色的，红色的，红色的，我做了七次实验，有四个是蓝色的，三个是红色的。我再抽一个，我还真抽到了一个红色的。这真没这么准的啊，一般来说八次实验结果会有偏差的，不一定会一半一半。它得到几百次，几万次以后偏差才比较小。但是，我运气比较好，真的是四个蓝色的，四个红色的。所以你一旦做上几百次，你就反过来可以推出来，这些硬币啊，真的是 $\frac{1}{2}$ 向上，$\frac{1}{2}$ 向下的。

当然，这个事情，我得混均匀了。因为我可能扔进去的时候，比如说以，某个面扔进去的，所以全是红的，所以我得混得很均匀的时候，才能保证它真的是在我抽的时候是基本上要么向上，要么向下，是 $\frac{1}{2}$ 的。不过是不是具体 $\frac{1}{2}$ 无所谓，反正它是某个概率的。我再试试，这是七个，然后，三个蓝色的，四个红色的，还行啊，差得不是特别大。那么这时候假设你猜出来了，它是 $\frac{1}{2}$。那么对于这种两面每面一个颜色的硬币，你在观测它之前，你就可以认为它本身是两个状态的，它只是抽出来的时候显示为哪一面而已。

那回过头来再看这个每一个硬币本来就只有一种颜色的情况。这个我随便抽。我抓了四个，两个黄的，两个红的。好你抓很多很多次以后，你也可以推断出来它的概率是 $\frac{1}{2}$。

但是仔细想，它们两种硬币之间有差别，为什么？它这里每一个球，只显示一个颜色，对不对。那个每一个硬币上，它其实显示两个颜色。这两件事情，对应着背后不同的概率的理解。这个每个都一种颜色的情况的概率的理解是，它其实是由很多个不同的东西造成的；这个每一个硬币都是有两面的情况，则其概率是由很多个一模一样的东西造成的。

当然它们俩也可以认为是一样的。你说，其实呀，我把它躺下那个面就当成它的那个面，于是每一个硬币在我看之前，也已经知道它的状态了。但是假设我们现在没有躺的状态，就是先不管它躺的状态，是我拿出来的过程当中决定它到底哪一面的，因为我拿的时候，我可能转动了它，所以我只有摊开手的时候，我才知道其状态。那么这样来看的话，它这个两面的东西的随机性是怎么造成的呢？它是由某种内禀随机性的，也就是说每个变量它自己，它就是向上或者向下的。

然后，这个一面的呢，是每个变量自己是完全定了的，只看我抓的时候不同造成的。你看，我理解它们，我特别喜欢，为什么？我看到的世界一点

也不复杂，对吧，我的世界特别干净，我掏出来什么就是什么，我掏之前它们还是这个。

理解这个两面的就不一样了，假设在这箱子里面的里头，它们自己是没状态的，只有捞到我手上才是有状态的，它相当于每一个东西是不是都是一个随机对象？

那现在问经典的世界到底哪一个，每一个一面的还是每一个多面的？前者是我拿的过程中不知道哪了哪一个造成的随机，后者是每一个硬币本身是随机的。

这个问题在经典的世界里头特别简单，它都不是内秉随机性，而是我拿的过程造成的随机性，为什么？因为你可以认为两面不同的硬币，其实在我看之前，它们已经是某个特定的状态了，对吧？尽管有两面，但它总有一面已经躺着了，假设我掏的过程又不给它转，或者我转的次数是相同的，掏的动作是一样的，于是它看起来该是什么就是什么了。那这件事情，使得我们对经典世界的理解特别地开心。

第一个层次是确定性的层次。事情是如果是一个车或者一个月亮这种完全确定性的东西，我们更开心，我看见车在那儿，它就在那儿，它一点随机性也没有，特别好。

第二件层次是确定性由于信息不完整导致的随机性。原则上，这样的随机性仍然是由确定性的东西导致的，只是我信息不够，才变成了随机性。就好像这里的两种硬币，尤其是那个每个硬币其实都只有一种颜色的情况。这样的随机性称为伪随机性。这个情况我也挺开心，因为我也完全可解释。

唯一我解释不了的事情，很不爽的事情就是真随机性内秉随机性。也就是一个随机硬币真的是没有事先摊好一面的，那么在我看它之前，它是既可以正面，又可以反面的。而我看了之后，它只能正或者反的，这个事情我是理解不了的。

好像我观测这一个动作，我改变了我的世界，这怎么可能？这件事情跟我观测这个意义就不符，我观测的意思就是说我尽可能地使得你是什么样的，我看到的就什么样，对不对？所以，在经典概率里头，这么简单的数学，它仍然存在着这个问题，这个问题是什么呢？是纯随机课题，如果真的可以存在的话，我们是解释不了的，我们是理解不了的。

然后，我们目前是怎么来理解纯随机课题的呢？我们总是把它还原成伪随机性来理解的，就是说在我们看它之前，它其实已经有正有反了，只是不知道哪个正，哪个反，信息不够而已，然后你随便一抓，它才表现为看起来

的正反不同。所以，就算是这么简单的经典的世界，它仍然存在着理解的问题。

这个真随机性的理解，还有另一个神奇的角度——多世界理论。他说每一个随机变量在被观测的时候，这个世界都发生了分裂，听说过吗？叫平行世界。就是每次我们对任何一个随机变量做观测，我们总是看到其中一个，对吧。他说这意味着其实有另外一个可能的世界，在那个世界里头呢，你看到的是那个样子的。这样如果把两个合起来，则回到真随机所描述的世界。原则上，这样的世界还可以有很多很多个，只要显示为正面的数量和反面的一样多。

好吧，如果确实是可以这么来解释的话，没准能够使得我稍微好过一点。但我不觉得它能好过到哪去啊。由于有经典纯随机硬币的存在，我们的世界在每次观测随机硬币的时候，都发生了分裂，走向了不同的分支。任何人的任何一次观测真随机世界都使得世界发生了分裂。

当然，电影里的平行世界就更神奇了，不仅走向了不同的分支，还可以从这个分支跳到那个分支，那是另外一回事。

但是，至少有人是觉得经典世界的纯随机对象的测量是想不通的事情的，企图去给它提供一个更好的解释。我不是在这里卖这个解释是合理的，我只是告诉你说，有人觉得他想不通，我也想不通，但是我不觉得那个多世界的解释是必要的。因为经典的世界本身就存在着这个问题，经典的随机变量在看之前和看之后，它会不一样。当然我说了这个不一样呢，在经典的世界里头真的可以绕过去，绕过去的方法就是把它们还原成它，认为其实在你观测之前，它们已经成了这德性了，所以也就没问题了。

再说一遍，经典世界，经典随机变量的观测本身也是有问题的，只是由于永远可以还原成伪随机的东西，我们看起来好像没问题。另外一个解决方法就是多世界理论，但是我不觉得它提供了任何一个新的东西。在物理学里头，前面这个东西叫确定性的客观实在，就是说这个豆子或者是这个球在你不看它之前，它就是红色的，你看了还是红色的，这个就叫确定性的客观实在。那这种叫随机性的客观实在，其本身是确定性的客观实在，仅仅因为信息不足，看起来好像随机。这些对象的状态和状态的测量，我们完全能够理解。但是，如果我们假装如果它是纯随机的，叫它随机性的客观实在，那么它在你看它之前是没状态的，不是正面，也不是反面，它只是正面、反面的几率都是 $\frac{1}{2}$ 或者某个概率；但是，你一旦打开看呢，它就要么正面，要么反面。这个对象的状态和状态的测量的理解是有问题的。

现在，说一下我自己对它的解释。我说很简单啊：每次测量你只有一个硬币，一个硬币只能显示一个状态；如果你重复很多次，不正好就是一半的几率正面，一半的几率反面吗？所以，我认为不需要提供任何新的角度去解释这个随机硬币的测量，完全就是一个可以接受的事情。

当然你问我这件事情有多爽，我确实也不爽，但是这很显然啊，很简单啊，就是如果你观测一次嘛，就正面或者反面嘛。如果你观测上几亿次，它其中一半是正面，一半是反面，不就这么个东西吗？它正好就是概率本身的含义啊，你非得说你测量干了什么，你问我这个问题干什么，我不回答这个问题。

经典的客体的测量就是这么回事，你拿过来，它可能显示为正面，再拿过来可能显示为反面。但是，大样本的平均它一半正面，一半反面。如果是更一般的 P，就是 P 的正面，$1-P$ 的反面，就这么简单而已。

当然，我再说过了，这是我自己的理解：无论经典确定性，经典伪随机性，还是经典真随机性客体的状态和状态的测量，都不需要任何额外的新的解释。那当然总是有不爽的人，包括我自己也不是这么爽，那么总是有人会提供新的解释的，这个多世界解释就是其中之一。那将来我们在讲到量子现象的时候，会使得这个问题更加复杂，这时候你再回到我说的这个经典的解释。

也就是说确定性随机和纯随机的随机，无论从数学上，还是实验结果上，它都是完全不可分辨的。物理学就是这么个东西，我们不管你理解起来有多困难，我们只强调数学上怎么描述的，测量出来有没有差别，这里是完全没有差别的。

为了使得你更熟悉经典概率论的线性代数的符号，我设计了几道，除了前面几道例题，还设计了几道作业题，希望你去完成一下，因为你只有经过大概三四个例子的练习，你才会发现这个东西特别容易看懂，要不然你会觉得它不容易看懂，就算你学懂了，也不容易看懂。看懂的方法就是把它变成你自己的语言，顺便数学就这么一个东西，它就是用形式语言来表达你自己思想的东西，所以你得把它变成自己的。也就是说以后当你看见右矢左矢的 $|\uparrow\rangle\, la\uparrow$ 的时候，你就知道了它就意味着向上态；右矢左矢的 $|0\rangle\, la0$ 的时候，你就知道了，它是显示为 0 的态，就这么简单。

然后怎么算呢？你就每次测量均值的时候，你就把这个 ρ 矩阵和这个 A 矩阵乘在一起，然后求迹 $tr\,(A\rho)$ 就完了。那怎么乘呢，乘的时候只要用上正交性，也就是 $\langle\alpha|\,\beta\rangle=\delta_{\alpha\beta}$ 这个公式。其实，$P_m=\langle m|\,\rho^c\,|m\rangle$ 也可以从 $tr\,(A\rho)$

得到，只要选择 $A = |m\rangle\langle m|$ 就行。我们来算一下：对于这个特殊情况，

$$tr(A\rho) = \sum_s \langle s| [|m\rangle \langle m| \rho^c] |s\rangle, \tag{2.49}$$

$$= \sum_s \delta_{sm} \langle m| \rho^c |s\rangle, \tag{2.50}$$

$$= \langle m| \rho^c |m\rangle. \tag{2.51}$$

所以它整个就只有两个公式 $\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$ 以及如果你要求物理量 A 在状态 ρ 下的均值，就是 $\langle A\rangle_\rho = tr(A\rho)$。只有把这两个公式变成自己的，你才可能做到我下面学的东西真的想明白的。

当然，我说了如果你觉得这实在是个挑战，你只需要学会量子的现象是怎么回事，为什么经典的解释不了就可以，也是可以的。为了实现这个目的，你是没有必要非得把这套概率论的矢量的语言学会的，可以不学会。但是，我强烈希望你学会，因为它真的很简单，它就是你以前所熟悉的硬币向上态和向下态的概率是 P 和 $1-P$ 均值是多少啊这种问题的另外一套符号体系。仅此而已。所有的习题，我也在后面几页的 PPT 里头提供了答案，做完之后，你可以来对照一下，但是强烈推荐你在自己去算一下之前，不要去看答案，只有真的去算了，才能把它变成自己所熟悉的符号。

2.6 本章小结

在这一章里面，我们感受了一下量子系统的行为的第一个例子——相机镜头的合适的镀膜可以增加光的透射率。我们已经发现，在单光子的情形，经典波动光学不能解释这个现象。经典概率论，也就是经典粒子的模型，也不能解释这个现象。而无论经典波还是经典粒子，其背后都是 Newton 力学。因此，我们发现，Newton 力学解释不了相机的镀膜效果。

然后，在本章第二部分，在我们开始构建这样的理论可以解释这样的现象之前，我们做了思想上和数学上的而准备：我们讨论了什么是科学，尤其是数学建模和可证伪性；我们还学习了概率论的 Dirac 符号语言，概率论的矩阵语言。

最后，我们用这些学会的数学语言描述了经典对象的状态和状态测量。

我们发现，如果假设存在经典纯随机对象，则其状态的测量也是不太好用日常生活的经验来理解的。但是，无论如何，其状态和状态的测量的数学描述没有任何问题：所给出的结果完全和实验相符。

再次提醒严肃的读者，完成一下习题，有助于熟悉这套数学语言。

第三章　量子系统的行为

我们学习了概率论，以及概率论的矢量形式的表达之后，我们来做几个概率论的实验，然后再来做相应的量子的实验，看一看为什么前面是能解释的，后面是不能解释的。将来，我们再来构建能够解释后面的现象的数学模型，也就是量子系统的理论——量子力学。

3.1　窄门实验的现象

同样的这个箱子里面是红色的或者是蓝色的片子，这个是一个门，我们假设水平方向的是能让红色的过去，一会儿我会给一个竖直方向的，这个竖直方向的就意味着它能让蓝色的过去，也就是说它挡住的是红色。我们看一看，这样的实验是不是能够用概率来解释，或者其实是反过来的，因为这个实验本来设计的，就是能用概率解释的。

我们来看一看这个实验是怎么回事，一会儿我来做量子版本的这个实验。我随便拿出一个，我拿出一个向上的什么颜色就是什么颜色，这个向上的是蓝色的，那我要过第一个，我说第一个只能让红色的过去，所以它过不去，好了，那这个就过不去了，故事结束。因为它就是这样一个片子，然后我再拿一个，我别又拿个蓝色的，我又拿个蓝色的，那没办法，它又过不去了。终于有个红色的，我又拿了一个红色的，先来看过第一个片子，红色的第一个片子是能过的，对吧。它肯定会跑到第一个片子的后面来，接着它会遇到什么呢？遇到让蓝色片子过去的，所以它过不去，因为它是要让蓝色片子过去的，好了，这就结束了。也就是说，无论我拿到的是红色的，还是蓝色的这个片子，我永远没法过这一组门，那当然特别简单，如果你把两个都改成这个红色（水平方向）的呢？那就一半的可能是能过的，因为一半的你会拿到红色的片子，然后两个都拿成竖直方向的呢？那就同样是一半的是能过的，因为你有一半的可能拿到的是蓝色的片子。

也就是说这个实验的结果是什么呢？结果就是单个片子有 50% 能过，两个片子如果一样的时候，有 50% 能过，两个片子如果垂直的时候呢，谁也过不去，这是这个实验的现象。那么，反过来，本来我可以先告诉你们这个现象，然后我说我过的那个是什么，那你可以倒过来猜，按照你过的这个结果，你猜我拿上来的这个东西是 50% 向上，50% 红色，50% 蓝色的东西，这就是科学。你先有个现象，再拿一个数学模型去描述它，后来发现，再重新做几百次实验，这个实验能得到验证结果。神奇的事情是什么呢？我现在说，我要做这么件事情，我要维持这一对板是一个只让红色的过去，一个只让蓝色的过去，然后我说你能不能中间给我干件事，随便干，想干什么干什么，然后我得让这个片子，能从这边穿到这边来。你想想你大概可以怎么做，你可以试试，你说第一个，我使得中间这个片子和第一片一样，不能过来，为什么？因为这两片相当于同一片，对吧，所以它跟之前的情景是一样的。

第二个，我使得中间这片和第二片一样，答案也是一样的，它也相当于这两个合起来是一片，两个一样的门，对吧？所以，它相当于同一个门，好了，这过不来。也就是说中间我无论放什么样的门，它都是过不来的。那么，我能不能放一个斜的呢？这种斜的方向的呢？这事不能干，为什么？因为我刚好抠的这个门的形状它是长方形的，所以它真的有个斜的方向。可是你实际上想想，回到那个颜色，红色和蓝色，那斜的代表什么，它没法代表任何东西，这斜的它没法看作我这个时候的一个门。因为它让一部分蓝色的过去，让一部分红色的过去是啥意思？在硬币的颜色这个事情上，我没法产生这样一个门。那么有一个什么东西跟这个斜的很像很像呢，叫概率性的门跟它很像很像，但是一会儿你会看见它不是这个，什么意思呢？就说这道门，它本来没这个功能，这道门使得我这么过来，平着过来我也进不去，就是红色过来我也进不去，然后竖直着我也进不去，所以这道门它其实啥也干不了。但是，它还可以看作一个什么事情呢？它说我看着一个概率性的选择的门，也就是说我这里有一个妖怪，那个妖怪我（要）干嘛呢？当我看到这个东西是红色的过来的时候，我以百分之多少的概率让它过，以百分之另外的概率不让它过。当我看见蓝色的时候，我以 Q 和 1-Q 的概率让它过和不过，那两个概率不一定是一样的，也可以是一样的，对吧。一样的就是说我都让，不管什么颜色过来，我都让 50% 能过，50% 不能过。所以，这个门它会有个什么效果呢？它需要上面站个妖，那个妖能识别我这个颜色。

识别完了之后，是不是这就能过来了呢？我们试试啊，就是选一个概率性的门。第一个还是只让红色的过来的，第二个斜着，我假设来的是红色，

我能过第一个，我能不能过第二个？我以 50% 的可能能过第二个，但是我只要能过来，是不是它肯定是红的，这是测量后的状态的理论，对吧？一个测量，你观测之后，它马上去看，肯定还是这个状态，要不然这个测量就没有意义了。也就是说当它到达最后一个这个方向的门的时候，它的颜色是什么？是红色，能过吗？还是不能过，所以就算你给我个概率性的门，我能够保证它能过来吗？过不来。同样的，你让第一个蓝色的试试，蓝色的碰见第一个就过不来了，对吧？所以，也是都过不来。我们增加了一个奇怪的概率性的门，可是就算有这个门，我们也不可能有任何一个硬币，能够从前面穿过来，除非它们是这种关系。这个结论放在脑子里，非常的重要，这是经典的对象，你完全能解释的，你看见的行为是这个样子。

结论就是当你把前后两个，完全让它相互互补的时候，中间无论你做什么事情，你甚至允许概率门的存在，硬币也是过不来的。我们现在来做一个让中间的这个振动，能够通过斜的传过去的实验，为了使得跟刚才的基本上一样，我们来重复刚才的步骤。第一个就是所有的三个门相当于一个门的作用，它们都是一个方向，你看见什么呢？你看见我这个抖动能够非常容易地从我这边传到最远处，这就是第一个现象。现在我们让第一个门变成直的，然后我们来看一看这时候传过去的振动会怎么样。当然，由于这个缝宽，实际上还是有个实际的缝宽的，所以也能有小小的振动传过去，如果严格的就只能在这个竖直方向振动，而不能在水平方向振动的话，第一个门如果严格的是这么宽的话，那么远处的振动将完全没有。但是现在还有一个小小的振动，可是你对比两个幅度来说，你会非常清楚地看见它们幅度上的差别。现在的问题就是我们有没有办法，经过中间的那个门，这正好就是第一个门有个红色的球过去，最后一门只能让蓝色的球出来，它完全不能出球，对吧？现在我们放个斜的，看看能不能有东西出来。我们把中间那个门改成斜的。

可以看到这个抖动的效果也已经完全不一样了，如果你仔细看这个抖动，你就会发现，在第一个门的时候，我的抖动可能还是竖直的，或者还是水平的。但是，在第二个门的时候，它的抖动呢，它是这个斜方向的。而由于第二个门是个斜方向的抖动，它这个第三个门，本来它水平方向的抖动，在之前第二个门还是水平（方向）的时候（是）很小很小的，可是这个斜方向的抖动使得我传过去的抖动，就要比刚才那个强很多很多，这就是中间那个斜着的门的效果。

然后你会发现很像很像我们刚才做的那个硬币的实验，颜色的实验，可是它结果完全不一样。这是怎么回事呢？我们做一个跟刚才做过的颜色的实

验完全平行的实验，但是结果完全不一样的实验。

在这个实验里头，我们每一道门，就是这个方向的槽，这个槽只能允许这个绳子在这个方向振动。第一个实验，我们看见我们有三个相同方向的槽，三个相同方向的槽就会使得我们的振动，基本上完整地被传了过去，所以那个振动是最强烈的。接着，我们把第一个门改成竖直方向的门，这个时候，我这么去振动它，你看第二个门和第三个门的振动幅度，你就会发现它的幅度就小很多很多。我也可以这么振，我这么振，第一个门的幅度很大，可是第二个门和第三个门的幅度很小很小，也就是说不管我怎么振，传到远方的振动总是很小。现在我们来做一件神奇的事情，把中间的那个门换成一个斜的方向的门，差不多 45 度。这时候你就发现它传过去的，比我刚才传过去的要大很多，如果你看得不是特别清楚，你可能把眼睛盯住那个门那儿，看它大概多少幅度在振动，可能会看得更清楚。这个就是我们这个神奇的现象，经过中间那个斜着的门，你看本来是跟刚才的对比，一个挡住红颜色，一个挡住蓝颜色的，一个挡住一半红一半蓝的，它不可能有东西过去，对吧？但是，现在我们放个真的斜的门，竟然振动传过去了，这是为什么？好，谢谢大家！

3.2 窄门实验的解释

稍微来解释一下刚才这个实验，这个实验是怎么解释的呢？它是这么解释的，它说第一个门传过来的振动，就是一个这个方向的矢量，你把它看作这样一个矢量。第二个方向的门，如果只有这个水平方向，那就是这么一个情况，也就是第一个矢量是这个方向的，然后问它有没有一个水平方向的分量，因为只有有分量，才能传过去，一会儿我再来解释为什么有分量才能传过去。然后你发现它没有分量，所以只有前后两个门，没有第三个门的时候，它是过不去的，因为这个竖直方向的矢量没有水平方向的分量。回到为什么要有分量才能传过去呢，这就是牛顿力学。牛顿力学告诉你，这个绳子为什么会有振动呢？是因为我一头在拉它的时候，每个绳子的点是由于它的运动，偏离了它待的这个位置产生的一个拉力。比如说我这么一拉，是怎么回事呢？是这个点拉着这个点，这个点拉着这个点，这个点拉着这个点，于是你往哪边拉，它下一个点也只能往那个方向运动，这就叫矢量性。也就是说我如果这么拉，将来整根绳子上的振动只能这么振，而我如果这么拉，整根绳子上的振动也只能这么振。当然我也可以斜着拉，这个是和刚才那个硬

币不一样的，它没有一个颜色叫斜着的颜色。但在这里是可以斜着拉的，我只要斜着拉，它的振动就是斜的方向。好了，现在的问题就来了，我如果一开始是这么限制了它的振动，以至于它只能上下振的时候，我碰到一个水平的肯定是过不去的，对吧？因为竖直方向的振动，不会影响水平方向的运动，这个是运动的矢量性导致的，可是如果我是斜着的时候，那就不一样了。斜着的时候，我是可以看作两个方向任何一个方向都能驱动我的振动。

这个东西叫运动和力的合成和分解，也就是说我只要有一个方向跟它不是正交的，我那个方向的振动，也能够被驱动，刚才的实验你已经看见了，当中间那个板子是斜的时候，尽管前面那个板子是竖直方向的振动，可是这个斜的板仍然会产生运动，斜的板上的绳子。这就解释了，当然它遇到下一次的时候，就是把这个斜的，再按照这个水平方向去做分解，对吧？然后，它这个斜的当然也有水平方向的分量，所以它就可以传过去。那总结一下，它怎么才能传过去的呢？是因为首先第一个竖直方向的分量，竖直方向的振动可以分解成斜的，它有斜的分量，再把这个斜的，它又有水平方向的分量，所以中间加入一个斜的门之后，使得原来不能通过振动的一堆门，变成了能通过振动的，而它的解释就是运动的矢量性，还有力的矢量性，也就是牛顿第二定律。

好了，之前我们说硬币的颜色的实验，是完全能够解释的，由经典概率论能解释的，但是它不可能中间通过某个门能过去。而这个是可以由牛顿第二定律，经典的运动定律解释的，它又能使得这个门过去，下面就是那个神奇的实验，什么都解释不了的实验。

3.3 窄门量子版：三个偏振片的实验

这是三片一模一样的偏振片，跟这个门是一样的，它内部也有一个槽的方向，只不过它这个槽的方向，它不是真的槽，一会儿我会解释那个槽的方向真正的物理是指什么，但是你不用管，你只要知道它每一个片子这么放着的时候，就是对着槽的竖直方向。这么放着的时候，是对准这个槽的水平方向。我们来做实验，你发现什么呢？你透过这个片子去看外面的世界，你会发现它变暗了，这是一个片子的效果。于是，你发现这一个片子的效果是不是和刚才那个硬币的一个颜色很像，放一个门的时候，它只允许一个颜色过去，所以你的世界少了一半的门。所以，在这里，你的世界里头少了一半的光子，它只有一半的光子能过来。

我们来放第二个门，同样的，如果我把两个门放成一模一样的，它就相当于同一个，能过第一个的就能过第二个。所以，你看见的事情就是，本来该有多黑现在还有多黑，它不会变得更黑，它跟一个片子是一样的黑。那现在我们让两片叠着，一个水平方向，一个竖直方向，你看见什么？全黑了。全黑了表示什么呢？光子都过不来了，为什么过不来呢？我不管用这个颜色来解释，还是用刚才的振动来解释，结果是一样的对吧，反正都是过不来。因为这个方向的门只允许这个方向的光子过来，当它经过这片竖直方向的时候，被挡住了，过不来了，看作颜色或者看作矢量都是可以的。神奇的事情来了，我要在这个中间差插上一片，当我中间的那片和第一片一样的时候，还是没有光子过来，因为它相当于它们俩是一个门。如果中间那片和第二个片子一样的时候，也过不来，因为它就相当于第二片，神奇的事情发生在，我稍微给它转过一个角度的时候，你发现什么？竟然又透光了。也就是说，它实际上，这样的一个正交的关系的互补的、完全把光挡住的东西，只要你斜着插过去，竟然又透光了。你说这有什么神奇的，你刚才那个绳子上甩的振动的实验不也相当于是这个吗？是的。绳子上的振动，它是由牛顿第二定律解释的，解释它的道理是力的矢量性，就是哪个方向有力，就会产生哪个方向相应的运动，以及力的合成和分解，运动的合成和分解，也就是斜的方向的运动，可以看作这股运动和这股运动的叠加。

我们现在来试试用同样的道理来解释一下它行不行，我们说完全不行，为什么？我们先做个简单的论证，说光子是一个一个的球这样打过来的。一个球到这儿，它一半的可能过去，一半的可能过不去，假设它过去了，也就是说这个光子它有个内部状态，它就是水平方向振动，跟刚才那个绳子一样。但是注意，光子和绳子不同的地方在于，光子没有其他光子拉着它，它是一个个过来的，对吧。那么这个水平方向的东西过来，遇到最后那个竖直方向的，叭，被挡回去了，过不来了，对吧？现在我说中间斜着插一个，它就能过来了，这意味着什么，光子这个东西的两个状态，是不是很像很像刚才那个硬币的两个颜色？但是它又能过来了，这意味着什么？按刚才振动的那个解释，好像是光子在这个方向，水平方向的振动，可以看作斜的这两个方向振动的合成，接着那个斜的又可以看成水平和竖直的合成才行，对吧？可是它是个光子，它是一个啊，光子不是一个弦的振动的分解，它没法这么看啊。它是一个，它是一个类似于颜色一样的东西，它怎么可以转换个角度看成合成。

当然我们知道，只要你允许我写下合成这个公式，反正我这个就能解释

了。可是我没法有合成啊，有人说了，一个一个光子不行，那我试试一群光子行不行，一群光子一样的呀。这个绳子之所以可以是，不是我有一群点在一起过来，而是在于每个点它中间有个小弹簧拉着，扯来扯去。但是，不管有多少个光子，它都没有扯来扯去这回事，所以光子的振动不是它自己的这个振动的内部的（00：19：53），不是它振动的外在表现的方向，而是它内部的一个状态。这个状态无论它是单个光子，还是多个光子，它都没法拆出来。那怎么办？所以我们知道的事实就是这个现象很像很像这个振动，只要你数学上允许我写一下振动的叠加，我就能解释。可是它是什么东西有的性质呢？它是光子，而光子这个东西，是一个一个过去的，不是扯来扯去过去的，所以没法用牛顿第二定律。所以它不能得到解释，如果我们希望解释它，那就强行地给光子的状态，也允许它写下这个矢量叠加、矢量分解的公式，我们就对了，可是我们没有任何一个理论能告诉我们，光子的状态能够做矢量叠加。因为它永远是一个一个的光子过去的，它不是说这有两个光子，或者光子把我自己劈两半，一个是平行的，一个是竖直的，然后我过去一部分又怎么怎么样，你只要允许我劈两半，这个实验倒也能解释。

怎么解释呢，说第一次过水平方向的时候，就是把这个光子，水平方向的分量过来了，竖直方向分量被打走了。当它遇到这个斜着的时候，这个水平方向不是可以拆成一个，这个斜和这个斜的分量吗，那这个斜的透过来了，接着遇到最后一片竖直的时候，这个斜的又变成了竖直的和这个水平的，但是不行啊，谁告诉你光子它自身的状态会是个矢量，以前在牛顿力学，在绳子上的波的时候，为什么是个矢量呢？是因为本来就是个矢量，哪个方向有 F，就有个方向的 a，那个振动就可以展开成别的方向的振动，而这一点在光子上是不存在的，除非将来的光子的数学的理论允许它做这个。所以这一个实验就告诉你，这么简单的光子过一个叫做偏振片的东西，这个偏振片大家不要觉得它特别神奇，现在大多数的墨镜都是用偏振片做的。所以，你如果找不到像我这种专业的偏振片，这个偏振片很便宜的，一毛钱还是两毛钱一片，但如果你找不到，因为市面上很少有得卖，那这时候怎么办，你就拿三副眼镜也可以做这个实验，就这么简单的事情，光子过三个偏振片，是任何你的经典的世界的模型，都解释不了的事情。

当然，我们前面已经知道了，镜头是有颜色（的），要镀膜，可以让更高的光过去，也是经典的世界解释不了的事情，因为经典的世界告诉你，镀一层膜就会损失一定的光，镀得越多层，它就会损失得越多，它绝对不可能镀完膜之后，反而透射率增加了。我们下一步会介绍更多的实验，这些实验

每一个都告诉你，经典的世界是不能解释的，大概如果你想解释它的话怎么办，比如说在刚才这个实验里头，如果你想解释它，最关键的事情就是，你允许光子的偏振状态做矢量叠加，至于这么做了以后，为什么就能解释以及这个矢量叠加什么意思，以后再说，但是你要明白的事情就是，这个现象是什么，这个现象能不能用经典的概率论或者是牛顿第二定律解释。如果不能的话，大概你可以怎么做。

3.4 三偏振片实验的计算与解释

刚才我们都是通过逻辑推理，来告诉你这个现象该怎么样，将来该怎么做，为什么不能解释。现在我们用之前学过的数学符号，来做一下计算，看一看是不是，不同颜色的硬币过三个门的实验，这个给出来的结果，如果完全按照概率论去算，真的就是完全能解释的，和实验现象是一模一样的。那么最关键的事情就是豆子在每一步的状态是什么，就是硬币每一步的颜色，在每一个时刻的颜色是什么，以及每一个门到底怎么描述，（24:13）也就是 和 A。一开始我们说硬币来的颜色，假设是向上的，我们管它叫态，就是右矢是 1，左矢是 1 的这么个态。你把这个态就写成个矩阵 ()。接着我们说让向上的过去的也是这个，如果是向下过去的就是态，我会把这个 1 和上 (↑) 认同，-1 和下 (↓) 认同，而有的时候，也会用 1、0，1 表示向上的，0 表示向下的 (24:48)。这时候你就把这个 A 矩阵和这个 乘在一起，求一个 Trace，这是算均值的方法，我们讲过了。你把它俩放在一起，一算这个 Trace 就发现等于 1。算完这个 Trace 等于 1 是什么意思呢？就是我的均值等于 1，什么样的时候均值会等于 1 呢，就是我过去的概率是百分之百的时候，我的均值才会等于 1，因为我过去算 1，我的均值就是 1，所以唯一的可能就是我过去的概率是百分之百。这个就是当一个红色的硬币来，遇到一个红色的门的效果，然后我们可以去算一个红色的硬币来，遇到一个蓝色的门是什么效果，（25:27）也就是说我们把那个 A 改成，然后用那个的公式（25:33）（ppt90 页）。你用上去之后，你就算出来均值等于 0。

（25:36）那我自己是个-1，均值不等于 0，均值等于-1，如果我用的是-1 的话。那什么时候这个东西（的）均值会变成-1 呢？那就是完全，不对，均值是等于 0。（25:52）这个均值等于 0 是什么意思呢？就是说过我这个向下的门，过我这个向下的门的几率是 0，也就是说，如果你自己的状态是向上的话，一旦碰到我，你的几率是 0，因为它过不来。

接着我们来处理刚才那个复杂的事情，刚才那个复杂的事情是我们在逻辑上构造出来的，就中间那个斜着的门，相当于一定的概率上允许向上的过来，一定的概率允许向下的过来。那这样的东西，你构造起来已经非常麻烦了，为什么？因为你需要你的逻辑思考和想象力，但是如果你有数学就不一样了，有数学，你怎么写呢？（26:39）有数学你写成公式（51）() 的样子，你让 q 的几率，让向上的过来，也就是，1-q 的几率，让向下的过来，(26:53)。有了这个算符之后，你接着再去算两次，算什么样的事情呢？第一次你去算这样一个槽，如果我一开始就是向上的过来，我完全过来了。过来之后，我遇到这个东西，我遇到它会发生什么呢？你算出来它的均值，以及它过去的概率。好，算出来了，算出来之后，你再去问过来之后的状态是什么，因为它本身就是这个向上的状态，所以当它过了这个斜着的时候，它还是向上的，也就是你用好咱们前面所说的, 算均值的以及测量后状态的那几个公式，你会算出来它自然就是向上的。

(27：36) 接着你这个　成了向上的，也就是你的　还是态，你再通过向下的槽的时候，它需要的东西是对吧？你自然就算出来它还是 0，它还是过不来。(27:48) 所以，你只要用好前面所说的概率的这些公式，你可以非常清楚地把我前面构造出来那个奇怪的门的数学表达式写出来。一旦写出来之后，你只要沿着那四五步去算，算个测量的均值，再搞好测量后状态是什么，它自然就能给你正确的答案，这就是数学的威力。

我们现在希望什么呢？当然对于这根绳子，如果我愿意的话，我也可以数学上给写一个公式，一会儿我把它写下来，但是那个就更难一些。一旦我们写完那两个，我们下面的事情是什么呢？说好吧，我能不能写下一组新的公式，这组新的公式下，前面我做的光过三片偏振片的实验，我只要先把它的算符写出来，把它的状态写出来，告诉你经过它之后，测量之后会怎么样。然后我再把斜着的算符也写出来，我把这个状态通过来，我再算出来，因为每次计算都是一样的，测量后状态是什么。

接着最后一步，我拿着这个测量后的状态，放到最后一个片子上，我说它测量的均值是什么，结果就搞定了，明白这个逻辑？所以，我只要你学会前面的做硬币的计算，经典随机变量的计算，如果找得到一个合适的理论，我这个合适的理论操作完全就着这个逻辑一模一样地算，我就可以告诉你答案是不是对的。那这个绳子的实验的数学是怎么解释的呢？是这样子的，说一开始你有一个水平方向的振动过来，我把它分成这两个方向，这个方向由于这个板子的设置的问题，被摁住了，我只让这个斜的过去。这个斜的过

来，我将来又把斜的变成水平和竖直的，假设最后留下来是竖直的，水平的又被盖住了，相当于我还是能过，我只要竖直的就可以，这整个计算用的是什么呢？就是（29:52）你只要不断地去做这个直角坐标系的分解就可以了。

这张图就是整个这个实验的总结，它告诉你经典概率论是能够解释硬币的颜色过这三个门的实验的，而经典的牛顿力学，是能够解释这个绳子上的波，过三个门的实验的。尽管它们的行为不一样，可是这个解释各自都是对的。而我们现在做的这个光过三个偏振片的实验，是一个一个过去的，所以原则上很像硬币的颜色，可是它的实验结果却像绳子上的波，所以是两者都不能解释的，它本身是不满足牛顿第二定律，也没有光子在扯来扯去，一个光子在那儿跑，不是意味着它带着后面一堆光子往前跑。这个事情怎么办呢？这是我们下面要解决的问题，将来我们会发现，解决它的理论，能够解释这个现象的理论就叫量子理论，它的最关键的点，就是允许我们一个方向的振动，变成矢量叠加，看成别的方向。具体怎么做，以后再说。

下面我们还会讲更多的实验，但是这些实验，每一个它所说明的道理都是一样的，道理就是我们经典的概率论和经典的牛顿力学是不能来解释这样的现象的，然后我们以后可能能解释这样的现象，是从个体的角度来说很像很像经典的概率论，可是又加上矢量叠加原理的这么一个东西。如果你已经懂得这个道理，后面的实验你就可以跳过，但是由于不同的实验，对于不同的人的知识背景来说，可能容易或者难接受的程度是不一样的，所以如果你到现在还没有抓住这个点，你可以尝试下面的实验。

偏振分束器上的实验

讲这个实验之前，需要介绍一个仪器，下面这些实验，因为比较复杂，我不可能在这儿给你展示，但是相信我，这些都是实验室里已经做过的实验。这个仪器它叫偏振分束器，偏振分束器和这个偏振片的不同在哪儿呢？偏振片是这样的，就是它跟我不一致的那些光，在偏振片里头，它就被它弹回去了，就没有了。但是，偏振分束器它比较好，它是把光分成了两路，就是如果你跟我一样，请你透射过我，如果你跟我不一样，请你反射，但是也保留下来。所以，画成光路图，就是一束入射光，它本来有这样的振动方向和这样的振动方向，然后这路透过去的就可能是这个振动，然后反射走的就可能是另外一个振动，这叫偏振分束器。

有了这个偏振分束器之后，我们就来做下面这个实验。顺便（说一下），那个偏振分束器由于我那个光的内部，它不是有个跟我是不是匹配的自由度嘛，所以每一个偏振分束器内部，它其实是做好了一个内部方向的，当然

做好之后，也取决于你外面怎么放，但它和它的几何位置并不是完全一样的。比如说这个片子，对于偏振片来说，我这个方向正好就是这个光能透过去。但是，偏振分束器它这个方向是，这两个几何方向和这个内部方向，它是两个不同的东西。我这个片子可能会斜着放，但是我完全有可能你过来的光，还是水平方向透射，竖直方向被弹走，所以这个要稍微地区分一下。

我们来看一个用偏振分束器做的实验。也就是说你想象一下，这个被弹走消失了的光，现在是在另外一个方向上被保留下来的，这支是被（34：03）弹走的光（透射的光？）。现在我们来做这么个实验，你把第一个片子沿着 45 度的方向放，沿着 45 度的方向放，能过它的这支光来做进一步的实验，但是这支光就是把它摁住，不许它透过来，就是用一个高吸收的屏给它吸收走，不参与下一步的实验。也就是它的第一步很像很像我这个真的偏振片，就是把光变成纯的 45 度振动的光，这是它的第一步。

这个 45 度振动的光过来之后，我再给它放一个 0 度的偏振分束器，0 度的，这是 45 度，我要放个 0 度的，那我就是这么放。那么这时候 0 度的光，这个 45 度的过来，遇到 0 度的光，它会做一件什么事情呢，它会把这个，因为 45 度它可以看成 0 度和 90 度的叠加，所以这个 0 度的光就透过去了，90 度那些，它就沿着另外一个路出来了，然后我沿着另外一个路出来的时候，我把两路光都引入我下一步的实验，接着，我让这个光和上面的那个光，在下一个地方各自放上一个反射镜之后，让这两路光给它重新又合起来，这路光也进入实验，这路光也进入实验。我让这两个光路将来在某个地方合起来，合起来的方式就是加一个反射镜去改变这路光，加一个反射镜去改变这路光。合起来之后，我在那个合起来的地方，再放一个 45 度的分束镜，我看看它会发生什么事情。发生什么事情的意思就是说，当我遇到 45 度那个分束镜之后，再一次遇到 45 度的时候，我到底是直接透过，还是一部分透过，一部分弹走。

如果出现了一部分透过，一部分弹走，我们管它叫两个输出，如果只有一个透过，那叫只有一个输出。当然，如果完全都弹走，也叫只有一个输出，不过在我们这个问题里头，完全都弹走，一会儿你会发现，完全不用考虑。所以，我们最后只关心这件事情，它到底有两个输出，还是有一个输出。这件事情我们怎么来看呢？我们先这么看，我们说它经过第一片是 45 度的，对吧？45 度的，经过 0 度的之后，往这边走的就是 0 度的，往这边走的就是 90 度的，到达这个片子上的时候，假设我们在跟踪这个 0 度的，0 度的到达了 45 度的片子上会发生什么事情，它自己是 0 度的，对于 45 度来说，

它又是可以看成 45 度和 135 度的光的，所以，0 度的过来会有两个输出，对于 0 度的来说，0 度的振动，对于一个 45 度的片子，它不是完全能透过去的，它是有两个输出的，一部分跟我平行，一部分跟我垂直。所以，我们预期它将来会有两个输出。

接着我们走下面这块，说我 90 度的过来的，90 度的过来到达它，90 度的对于 45 度来说，同样不是平行，也不是垂直的，它也可以看成一个 45 度的分量，一个 135 度的分量，所以它也有两个输出。也就是说如果你把自己的眼睛盯住这个光子跑的话，它要么从上走，要么从下走。从上走的时候，它肯定要么从上，要么从下，它不可能劈成两半，我们说的光子的能量是最小的，它不可能再分开了。所以，它要么从上走的时候，答案是两个输出。要么从下走的时候，答案是两个输出，对吧？所以，我自然地得到一个答案，答案是你这个实验将来会得到两个输出，这没错吧？谁能告诉我一下，哪里错了？对吧？答案是两个输出。我再告诉你另外一个理论上是怎么想的，这个理论是这么想的，它说你看你不是 45 度嘛，一开始透过去的 45 度，碰到 0 度以后，不就把这个光再分开吗？将来合到那个点上的时候，不就相当于取消了这个偏振分束器的作用吗？因为它又合起来了。你把一个东西先拆开，到一个点又合起来，中间什么也没干，我说你这不过就是还回到 45 度，对不对？我既然又是回到 45 度，我遇到最后那片是 45 度的偏振片，对我来说是完全平行的，所以它只有一个输出，这个输出就是透过去，这是两个不同的理论，对吧？

3.5 偏振分束器实验解释

那么这两个不同理论，哪一个对了呢？实验结果是真的只有一个输出。但是不对呀，真的是一个输出的过程当中，我说了呀，你先劈成两半，对吧？然后又合起来，所以看作什么也没干，但是我又说了光子不能劈成两半，难道光子这么神奇，它同时走两条路，可是又不把自己劈成两半，能吗？同时两条路都走，但是它又不劈成两半，好吧，没准你说它们俩离得特别近，在一个光子的作用范围内，但是这个实验是可以这么做的，它们这两条路径是可以离得十万八千里的，好几个公里，好几个什么，甚至几万米，这个实验做出来都是一样的。所以，光子是绝对不可能在这个范围内，它同时走的两条路，又没把自己劈开。但是，我们说了呀，我只要这么干，这个实验解释就是对的，它只有一个输出，我只要把它看作能劈开，再合起来，我的解释

就是对的，可是你不能把它劈开。

然后另外一个呢，另外一个逻辑上太有道理了，你看光子从这儿跑到那儿去，无论它怎么去，它总而言之，要么走这条，要么走这条，对不对？既然是要么走这条，我看看走完这条它的实验结论是什么，两个输出。我再看看走完这条，它的实验结论是什么，两个输出。所以，两个可能性都是两个输出，每个可能性都是两个输出，我自然得到的答案就是两个输出啊。哪里错了？但是，它实际上就是错的。那为什么？我们知道解决的方案，对吧？解决的方案是，不要认为光子是要么走这个要么走这个，认为光子其实同时走了两个，可是我又说了，它不行，为什么？因为它离得十万八千里，它不可能劈开同时走两个，而且它的能量，你任何时候去测，它也不可能测出半份光子的能量来。这又是怎么回事。也就是说如果我们允许，这两个做一个矢量叠加，我们的答案就是对的，对吧？90 度和 0 度合起来是 45 度，我们只要做这个矢量叠加，合起来答案就是对的。可是你没法做矢量叠加，为什么？因为你是“或”的关系，走上面“或者”走下面的关系，只要是“或”就是怎么叠加，就是概率叠加。概率叠加和矢量叠加的差别在哪儿呢？概率叠加，我们的数学公式已经学过了，（41:38）概率叠加的数学公式是。而如果是矢量叠加，是，它会等于 45（41:54），一会儿我会告诉你这个东西到底是什么意思，但是我写一个公式先告诉你它们的区别。（41:59）区别就是你把，这个左矢、右矢配好了，加上这个左矢、右矢配好了，（42:06）它绝对不是 45 度，就好像是我以一定的几率站在这儿，加上我以一定的几率站在这儿，我绝对不是以任何几率站在这个地方。它只意味着是这两个位置的组合，也就是说，不管它们的概率是什么，它就是走上的路径和走下的路径的组合。

而由于上路径给两个输出，下路径给两个输出，所以你无论怎么算都是等到第三张图的时候，它这个明暗相间的就比较明显。等到第四张图的时候，它就是打了几千几万好多好多个粒子，然后把它洗在一张胶片上。在这张胶片上，你就非常清楚地看见了那个亮条纹的地方，以及那个暗条纹的地方。本来我们说它应该是差不多这么有鼓包的分布，但是它变成了暗条纹的分布，在鼓包里头出现了暗条纹，这件事情是绝对解释不了的。

161 两个输出。但是实验结果是一个，你唯一的办法就是突破概率相加，把它变得允许矢量相加。那我们说了问题也一样，我们知道了可能的出路，我们一会儿也会演示到底怎么弄成矢量相加它就对，可是这是个问题，这个问题就是，凭啥？我需要用矢量相加。但是，你经过这么多实验之后，你就发现，凭啥？科学啊，科学只有一个要求，要求是什么？你别管我写下来的

数学是什么含义，我只问一样事情，这个数学写下来之后，我如果做一番计算，我得到的那个答案和实验是不是一样的，那将来我们只回答这一个问题。

3.6 光子到底从哪里走的？

这个实验甚至可以进一步做，进一步怎么做呢？你说我就想知道光子到底从上面走过去，还是从下面走过去，这个实验怎么做呢？有人就在这个光子的路径上放了一个探测器，这个地方放一个探测器，这个地方也放一个探测器。也就是说如果光子走过去了，这个探测器也亮了，那么我就知道了它走的是上面的路。如果这个探测器亮了，它走的是下面的路。

这个实验做出来，结果是，只要真的放了探测器，不好意思，就真的是两个输出。你只要这两个地方都放探测器，最后的结果真的是有两个输出，这件事情是一件更加神奇的事情。对吧？探测器你干什么了，探测器看起来好像什么都不干的样子，但是一会儿我们也会告诉你，你只要按照我们教你的这套数学方式去算，你最后算出来，只要加上探测器，它真的是两个输出，只要没有探测器，它真的是一个输出。也就是说如果你用某种方式使得你能够区分光子到底是走的这个路径，还是这个路径的时候，这个所谓的矢量叠加性就不存在了，（44:38）也就是说那个度的那个加法就不成立了，它自动地会退化成，（44:49）这么个东西。那我们也会告诉你，为什么这个数学会有这么个结果，而只要有了这个结果，那这个新加进去，加了探测器的实验就能得到完整的解释。

3.7 单电子双缝干涉实验

下一个实验是单电子的双缝干涉实验，单电子的意思就说，每次我们只打出去一个电子，所以你如果认为这个现象将来的解释，是要通过这个电子和另外一个电子，相互联系起来才能解释的，那么这个解释就是不对的，也就是每次只有一个电子过去，你的解释只能依赖于这个，只能在这个基础之上构建。那现象是什么呢？我把这个上面放一个电子枪，这个地方中间拿一个棍子堵住，两边开了两个小小的缝，下面是电子屏，只要电子打到这个屏上，我就会记录下来在哪里打上的这么一个装置，这个装置的实验是，忘了这个公司叫什么了，无所谓了，是一个日本的公司做过的，并且把它公开发

布在网络上的，你可以去下载这个视频的记录。这个实验结果是什么呢？它说每一个电子之间的时间间隔，对于电子这个东西来说，就是宇宙长的时间，也就是你从来不用担心，当我有一个电子在整个仪器里的时候，另外一个电子会出来，它从来不干这样的事情，它使得基本上能保证每次在整个仪器里头只有一个电子。

然后，你想如果是经典的世界，经典的世界就说，我从这里打过来，可以打在这个范围内，从这里打过来，走右边的缝的时候，可以打在这个范围内。那么，它最后那个长什么形状呢，就是把这两个鼓包给叠起来，从这边过来的是这么个鼓包，从这边过来独立的是这么个鼓包。鼓包的意思就是说这个范围内是能收到电子的，当两个门都打开的时候，我（它）就应该差不多是这么个鼓包。这个就是经典世界的预测，这个经典世界的预测，如果你想去验证一下怎么办呢？比如说你可以去玩一下那个叫做，植物大战僵尸里头的那个豌豆射手，你有两个通道，然后你把那个有很大范围的豌豆射手放在这儿，然后你说这个过去的时候，这个豌豆射手是覆盖这个范围，这个豌豆射手是覆盖这个范围，于是中间那个通道上的僵尸就会死得很快，因为它是两个豌豆射手都能覆盖的范围。这个就是你的日常的认知。

我告诉你现在实际的实验结果是什么呢？实验结果是这样的，本来我们说应该是这样，对吧？那实际的实验结果是这个地方，有一段区域，它不会被射到光子，也就是它是这样。那同理的，这一侧也会有一段区域不会射到光子。那中间这个地方，它会特别特别强，大概画出来就是这个样子，就是它本来该是这么两个区域，这样两个区域因为它有交叉，它叠起来应该是这么个东西，实际上是变成了这么个东西，然后中间有一个特别强的峰，那现在问，这个没有光子能打到，没有电子能打到的地方它到底是怎么回事？那回到刚才豌豆射手的例子，相当于什么呢？说我这个通道上放一个豌豆射手，那个地方放一个豌豆射手，当然中间变得奇强无比，中间所有的僵尸都出不来了，但是明明它们俩各自都能覆盖的那个范围内，产生了一个新的空档区域，这个空档区域，当各自只有一颗豌豆射手的时候，是没有这个空档区域的，但我把两颗豌豆射手同时种上的时候，发现它多了两个空档区域，可以想象吗？这个游戏要这么设计的话，这些玩游戏的人非得灭了那个设计者不可，对吧？

我还得算一算它那个空档将来会出现在哪儿，按量子力学来算一算。这是不可能的。也就是在你经典的世界里头，你的概率性的叠加导致一个 $(0,1)$ 之间的数加上另外一个 $(0,1)$ 之间的数，只能使得你变成比你单个更大的一

个数。它不可能是，一个 $(0,1)$ 之间的数（因为它本来就是概率）另外一个也是 $(0,1)$ 之间的数，两个完全加起来能变成 0，这是不可能的。

但是在单电子的干涉实验里头，它就这么发生的。它最后就告诉你，我会出现明暗相间的条纹。暗条纹的意思就是说，这一串是没有被打上的。我们来看录像的截图和视频。如果视频和截图，你得去问一下那个公司是不是授权给你用，好像上面有授权，如果不能授权的话，你就不用放进去。

第一张图是最开始的状态，只有几个电子打出去的时候。零零散散的，整个空间只有几个电子。第二张图是累积了，我不知道多长时间。过了比较长一段时间以后，这个时候你还基本上看不出模式来，它还是整个空间某些地方就有一些电子，但是如果你清楚后面的答案的话，这时候你已经看得出来它有明暗相间的了。如果你不知道后面的答案，你还是看不出来。

等到第三张图的时候，它这个明暗相间的就比较明显。等到第四张图的时候，它就是打了几千几万好多好多个粒子，然后把它洗在一张胶片上。在这张胶片上，你就非常清楚地看见了那个亮条纹的地方，以及那个暗条纹的地方。本来我们说它应该是差不多这么有鼓包的分布，但是它变成了暗条纹的分布，在鼓包里头出现了暗条纹，这件事情是绝对解释不了的。

如果你非得解释，你大概可以怎么解释呢？经典的光波是这么解释的，经典光波的实验是说，其实我们把光沿这个方向入射，我们在这里做一个缝，然后在后面做两个缝，前面这个缝的作用就是使得光源比较单一，就从这个缝发出的光波，发出来之后，它经过后面那两个小缝的时候，进入上面的小缝的时候，它就有一个光的投射的区域，进入下面那个缝的时候，在这边也有一个投射的区域。然后它说这两个投射的区域，如果它有重叠，那么重叠这个地方，它就应该按照光波来算，光波是怎么算的呢？它说你的算的方法是把一束光，看作它能劈成两半儿同时入两个缝。同时入两个缝以后，它将来在同一个区域上面遇到的时候，它既有可能是相加，也可能是相减。为什么可能是相加和相减呢？我们说了光波是这么一个东西，要么是波峰，要么是波谷，看它们俩错开的位置。如果说它们俩刚好重合，波峰和波谷合起来没了，它没有振动了，所以就是暗条纹。

如果它们俩错开了，或者甚至真的就是这么完全拼在一起，完全拼在一起是因为一个波峰过了，本来自己也该是一个波谷，那么我又遇到另外一个波谷，那这时候就叫相加，就会变得特别亮。所以，在经典的时候的波动力学是这么解释的，就是把它看成波，劈成两半儿同时过去，过去以后再看哪个地方的波峰，哪个地方的波谷的匹配。它也可以把这个现象算得特别好，

就是哪个地方出现暗条纹，哪个地方出现亮条纹，这些东西完全是准确的，可是它不能解释我们的实验，为什么？我们说了，这个实验依赖于，如果这么解释的话，依赖于牛顿第二定律，波峰拉着波谷这个现象，或者说我看着绳子上的波动，或者说我看作一个波劈成两半儿。

劈成两半儿这件事情，在只有一个一个电子打过去，是不成立的，电子永远是单个的过去的。而过去之后，才发生了这个事情，也就是说你想吧，我这个电子它只要过了上面那个缝，它是不是就打在那儿了。然后下一个如果过下面的缝，才能打到那儿去，它们俩可能有什么关系啊，怎么可能会加起来，它不可能的。它中间的间隔是宇宙长的时间。好吧，那你接着问，那这个电子到底怎么过去的？难道它是“啵儿”把自己劈两半儿，同时过两个缝，过完之后在某个地方合起来的？

这个也特别容易做实验，怎么做呢？你就在两个缝各自地方放一个探测器，只要你去做这个实验，你会发现：第一，在这个实验里面电子永远不会分开两半，探测到的都是一个个的；第二，这个时候实验结果就没有了明暗相间的条纹，就会得到这样一个条纹。

和我们前一个实验类似，你只要去探测出来它到底从哪走的，它就不能做相干叠加了。两种可能如果是可区分的，就不能做矢量叠加了，你就必须做概率叠加，就看作往上走的会是什么分布，往下走的会是什么分布，然后把两个分布函数加起来，这叫概率叠加。于是你就看不见明暗相间的条纹。

这两个实验，如果你听完之后，没有睡不着觉，就真的是你没有被量子力学痛苦过，于是你根本就没明白量子力学是什么。我记得当年我看完这两个实验之后，真的是睡不着觉的，怎么可能呢，光子到底怎么过去的？电子到底怎么过去的？如果它是要么走上面，要么走下面过去的，那就应该是这个经典叠加啊。而且，我真的可以加个探测器，一测我就发现真的就是经典叠加的结果。那好，那不这样，那就一起过去的呗，可是又不可能，一个电子它不可能，你在空间任何时候去测量它，它都不可能把它自己劈成两半儿一起过去。然后你可以接着说是不是这样的，电子其实它是一个特别神奇的东西，只要是有人测我，我就不劈两半儿，没人测我，我悄悄的时候把自己劈两半儿。你见过这么聪明的电子吗？它还能知道你在不在测我。所以，它神奇的地方在哪儿呢？它真的每条路都是完整的一个电子过去的，可是路之间的加法，它不是概率的加法，只要是概率的加法就不可能出现暗条纹，而是矢量的加法。只有这样才能解释这个实验，那当然就算我解释了这个实验，我仍然要问，怎么光子就这么过去了，电子就这么过去了的问题，这个

问题我们先留在这儿。因为就算解释了，这个问题也是一时半会儿不好回答的，但是我们说了，我们是物理学家，我们不回答到底怎么过去的问题，我们只提供什么，给你一个菜单，你只要按照我们这个菜单去做，做出来的菜就是符合你的胃口的，实验现象就是能解释的。

3.8 自旋的实验

下一组实验是自旋的实验。自旋的实验，当年Stern和Gerlach这两个人，他们怎么发现的呢？他们让一组好象是银原子，通过一个磁场，然后就去测量通过磁场以后的位置，如图，发现绝大多数时候，它都会分成两束。然后大家就想，为什么会分成两束呢？这是件不可思议的事情。

第一个不可思议的原因是因为，在量子力学之前，在自旋之前，绝大多数的变量都是连续变量，比如说位置 x，它是都可以取值的，比如说动量 p，也是很大范围内都可以取值的。连续变量，它不太会出现类似分成两束这种行为。连续变量应该出现的行为是，它可以是某个分布函数的形式，也就是在 x 的某个取值范围内都是有的。它绝对不会说，这个值基本上在这儿，这个值基本上在那儿。那么第一个他们猜测的关于自旋的模型，就是这样一个模型，说它其实是硬币的两面，也就是一个两变量的随机模型。

这个两变量的随机模型，它可以用来做哪些实验呢？它可以用来做，我这里提到的第一个实验。第一个实验就是我让这个自旋，它其实是在电子上的，当年为什么用银原子做我也不知道，我们现在就简单地说是个电子。或者我简单就直接管它叫自旋。让自旋通过一个磁场之后，做一个自选方向的测量，相对于磁场来做的自旋方向的测量。至于这个测量数学到底怎么写呢，我们以后再说。我们发现一个实验事实就是只要一个自旋过来，通过某个方向的磁场，它就会在这个磁场的作用之下，分成两个状态。这两个分开的状态表现为到达这个屏幕上之后，就有的向上，有的向下。如果你想解释它，你就用这个经典的硬币，说这个自旋其实就是个硬币，它内部有个向上或者向下的方向。如果它向上，那么经过这个磁场之后，它就会落在这。如果它向下，经过这个磁场之后就会落在那。当然，实际上物理学会告诉你，它那个落的上下的位置和自旋自己的上下刚好是相反的。不过，这个名词上的有问题，对于我们这个实验来说，没有影响。为了语言简单，我们就把这个落在上的叫向上态，落在下的叫向下态。

接着我说，我要把刚才这组实验，这组实验是能够用经典硬币来解释

的，我把刚才这组实验做一个重复，做一个重复什么意思呢？就是你看，我再给它放个 z 方向的磁场，然后我看看它再分成一份还是两份，我说答案其实是分成一份，为什么呢？因为它在第一个地方已经分裂了，所以我把下面那个给它堵住，往下的那个不再参与我的实验了，我只要那个往上的那支参与我的实验。我有两套仪器，对吧？经过第一套仪器之后，往下那个我给它堵住，拿个木板堵住，不许它再过去。往上的那个，进入我的另外一组仪器，也是 z 方向的磁场。按照我刚才那个概率论的模型，你很容易就猜出来它应该往上，因为它既然过 z 方向，已经是落在往上方向的，下的已经被堵住了，它的状态就是向上。于是当下一次它再经过同样的门的时候，它肯定还向上，所以就是一个这个实验，红颜色的过来，然后再放一个门还是会看到是红颜色的，因为蓝颜色已经被我踢走了，过不来了。所以，它还是能过来，而且肯定只有一个方向。

这个答案是对的。如果你只用 z 方向的磁场来做实验，那么这个实验的结果和我刚才做的这个预期是对的，我做预期背后的模型是什么呢？就是自旋的像硬币两状态这样的一个模型。就是说我拿这个两状态硬币模型去解释自旋，在这个实验里头是没有任何问题的。

那神奇的事情马上就来了。这个神奇的事情是什么呢？它说这样，你拿着，你先过一个 z 方向的磁场，堵住往下的，只让往上的过去。接着让这个再经过一个 x 方向的磁场，问它到底有一个可能的输出方向，还是两个？答案是两个。

那我刚才这个模型就不对了，对吧？因为我刚才只有 z 方向的状态，我没法来解释 x 方向的现象。那我怎么拯救呢？我说你不用着急，这样啊，你让 x 方向也变成一个硬币。也就是说这个自旋它相当于一个多维度的随机变量，在 z 方向它是两个状态的随机变量，在 x 方向它仍然是两个状态的随机变量。那么，我第二个实验也能得到解释。因为第一个实验相当于它只选择了 z 方向的特定随机变量，正态的选上，负态的没选上，但是 x 方向它没管。所以，将来我第二次进入 x 方向的时候，它仍然会出现像硬币一样的行为，两种可能输出，对吧。这个实验也能得到解释，只不过我的理论变成了什么呢？变成了有很多很多个方向的随机变量，对吧。我们看看这样一个模型，是不是能解释下面的实验。

下面的实验是什么呢？它说这样，你先弄个 z 方向，把向下的盖住，再弄个 x 方向，把向下的盖住，你再弄个 z 方向，问有几个输出。这设置明白了吗？

我们相当于在前面那个实验上，再加一个磁场，对吧。那个磁场是 z 方向的。这时候如果我们按照前面那个，多个方向的随机变量的解释，它的答案是什么呢？它的答案是只有一个输出，为什么？因为第一道门，它选择了 z 方向向上，第二道门选择了 x 方向向上，当我碰到第三道门的时候，它又是 z 方向，所以它自然就是 z 方向向上，所以它只有一个输出。

而且，这样看起来和我前面做的第一个实验也很像，第一个实验怎么做的，说我弄个 z 方向向下的盖住，再弄个 z 方向，它还向上。所以很有道理，对吧。

但是，我告诉你这个实验事实是三个磁场 $z-x-z$ 这样设置的时候，它最后从 z 出来的时候还是会有两个输出。这是非常神奇的事情。

比如说拿刚才那个硬币做类比，做类比就是，我把一个叫做硬币的形状，一个叫硬币的颜色。比如 z 方向我管它叫硬币的颜色，也就是说一开始，我把所有的蓝色的都剔除了，把所有的红色的都让它过去。后来我的硬币，也就是类比于 x 方向的是硬币的形状。比如说，一个是长方形的，一个是圆形的。接着，到选择形状的时候呢，我把所有的长方形的都剔除，把圆形的留着。所以我留下来的状态该是什么？红色的圆形对不对。但是当我把这个红色的圆形，再一次扔进去看什么颜色能过去的时候，我发现，蓝色的硬币出来了。你想象一下这可能吗？这不可能啊！所有的蓝色的硬币已经被我第一次剔除了，我第二次剔除的是所有的长方形，跟颜色没关系，我把圆形的留着。然后我现在得到的就是圆形的红色的，正常当我再问它什么颜色的时候，红色啊。

但是实验结果呢，蓝色的出来了。那这表示什么呢？这表示我的颜色形状两因素的两状态随机变量模型不能描述自旋的行为。

3.9 自旋实验的解释

这表示红色的里头，具有长方形和圆形的成分，圆形里头具有蓝色和红色的成分。只有这一种理论是能解释这个观察到的实验现象的。只要是允许这个现象发生，这个事就能解释，对吧。也就是说每一个方向的状态之间，并不是独立的，它是包含关系的。z 方向的时候，我尽管只选了向上的，可是它包含了 x 方向的向上和向下。接着，当我把 x 方向向下盖住的时候，它确实是 x 方向向上。这毫无疑问的，因为我只要再套个 x，它还是 x 方向向上。但是，x 方向向上竟然包含了 z 方向的向上和向下！这就是它告诉你

的事情：就是某个方向的向上的状态，包含了另外一个方向的向上和向下状态。这不正好就是我们绳子上波干的事情吗？一个水平方向的槽打开了，你可以看作它是斜 45^0 正反两个方向的分解，而一个正斜 45^0 方向的振动，你可以看作一个水平和一个竖直方向的分解。只不过这个东西存在和成立的前提是方向矢量和牛顿第二定律。这特别容易理解。但是，在我们刚才那个自旋里呢？你明明知道它会出现什么现象，也知道一旦用上允许 z 方向向上态包含 x 方向向上向下态，以及 x 方向向上态包含 z 方向向上向下态，就可以解释这个现象。可是，你不明白这到底怎么来理解，那个像牛顿第二定律（其包含了运动的矢量性）一样的东西在自旋的情形下是什么。但是，我们说了，再说一次科学不解决怎么去理解的问题，我们只解决，你只要照着我给你的这个模型的描述去算，算出来的答案和实际的实验相符，就是科学。

我们已经非常清楚地看见在这个实验里头，它的关键就是 x 方向的向上态，一定程度上包含了 z 方向的向上态向下态。这个也是以后还会再一次强调，也是我所说的，一个苹果加另外一个苹果，它等于一个香蕉。那个香蕉就是 x 方向向上态，那个好苹果和烂苹果就是，一个是 z 方向的向上态，一个是 z 方向的向下态。一个 z 方向向上的和一个 z 方向向下的，当你把这俩矢量加在一起的时候，它是 x 方向向上态，这是一件非常非常神奇的事情。可是你只要允许它这么干，你的所有的实验解释都是对的。将来我会告诉你，这个数学是什么样子的，这样的数学为什么就允许你这么干了。这就是你所要的量子的理论。也就是说你只要把你的数学写成这样，你之前看过的所有的实验，它的解释就都是对的。

3.10 多路自旋实验

我们下面来讲所有实验当中的最后一个，就是 Stern-Gerlach 实验的，一个跟前面的偏振分束器的实验类似的一个实验，多光路的实验类似的实验。

它是怎么回事呢？先让自旋进来，过一个 z 方向的磁场，接着把 z 方向往下的摁住。我们说了这时候，我们只有 z 方向向上的状态，对吧。因为我们可以做实验去确认它，如果我再过一个 z 方向，它就只有一个向上。我们就管这个状态叫 z 方向向上。接着我们把那个 z 方向向上的状态，引入一个 z 方向的磁场，我们说了这个时候的结果是，它通常会劈成两半儿。劈成两半儿也不是说，它把自己这个自旋劈成两半儿，而指的是如果我去做很

多次实验并且测量一下最后的结果，有的时候它向上，有的时候它向下，合起来向上和向下的数量差不多多。现在我怎么办呢？我在上面再放一个别的磁场，下面也放一个别的磁场，这个磁场会使得我往这个方向走的自旋转个弯，往这个方向走的自旋也转个弯，至于这两个自旋怎么做出来，你就别问我了，这需要高中的时候去算那个拐弯的轨道才行。也就是说我经过 x 之后，本来该分成一支向上和一支向下。可是，由于上面有个磁场，它弯下来了，下面也有一个磁场它弯上去了。于是，它将来会在一个地方重新聚合。聚合之后，我再把这个聚合的那个点，刚好放一个 z 方向的磁场，然后我问这时候最后那个屏幕上，到底出了 z 方向之后有一个输出，还是两个输出？

我把它总结一下：一个自旋过来，过一个 z 方向，摁住往下的，只让往上的过去；把这个自旋放在一个 x 方向的磁场里头，然后，它会分成两支；接着，我在每一支后面加一个用来翻转自旋轨道的磁场，让它们翻转，在一个地方聚合；最后，在聚合的地方，再过一个 z 方向的磁场。也就是 $z-x-$聚合$-z$ 方向，并且在第一个 z 方向堵住了向下的只能向上的过去。

我们来看，如果这个自旋是走的这条路径，因为它本身不是 x 方向出来，可能走上，也可能走下。如果走的是上面的路径，则其状态是 x 方向出来的向上。同样的道理，我们怎么确定这件事情呢，因为你如果再放一个 x 方向，它肯定只有向上，所以我们知道了它是 x 方向向上。接着到下一步，我是 x 方向向上的东西，我下一个进入的东西是 z 方向。这个事情我们之前已经在别的实验里看过了，对吧？它会劈成两半儿，就 x 方向向上的东西，它会劈成两半儿，因为 x 方向是包含 z 方向向上和向下两个的。我们看如果它走的是向下的那一支呢，则它是 x 方向向下状态，再到 z 方向的时候，它也是劈成两半儿。你看，无论从 x 方向出来以后自旋走向上还是向下的路径，我们的结论都是最后它就会在屏上产生两个输出。因此，这两个相同的情形无论怎么组合都只有出现相同的结果——也就是有两个输出。但是，和多路光子偏振实验类似，我告诉你这个实验的结果是，只有一个输出。不过这个实验，我不确定有人做过，因为这个实验控制比较难。它比控制光子难，控制光子的时候，你让它翻转，你就放个平面镜就行了。控制自旋的时候，你让它翻转，你要加磁场才行。

先假设它做过，没有的话做起来也很简单，当然是理论上简单。那么这时候你就会发现它只有一个输出。我们来解释为什么只有一个输出。在用数学描述这个解释之前，我们来依靠直觉解释一下。

你看，你反正是经过 x 方向以后，你把它偏转一下，再偏转一下又聚

合，对吧。所以，相当于这两个偏转磁场的作用，就把 x 方向磁场的作用给消除了，所以经过这一段之后，那么前面的状态是什么则在这儿的状态就是什么。那前面的状态是什么呢？是 z 方向向上，所以到重新汇聚起来的时候还是 z 方向向上。于是，经过最后的 z 方向磁场之后，我们只看到一个输出，就是 z 方向向上。

那这件事情将来数学上只有怎么做，才能真的符合我刚才描述的第二个解释，而不是第一个解释呢？就是必须把 x 方向向和 x 方向向下的矢量，把这两个矢量做矢量叠加，它才加得出来是 z 方向向上。就好像前面我举的例子，一个 z 方向向上的和一个 z 方向向下的，加出来是 x 方向向上的一样。如果你做的不是矢量叠加，而是概率叠加，那么我们看，我们已经知道了它是两个输出。

概率叠加就是沿着轨道一有两个输出，沿着轨道二有两个输出，所以无论你怎么组合它都是两个输出。所以，这个实验和前面的光子到底走哪条路的实验是一样的答案，就是按照这个实验结果，必须把两个路径上的状态做矢量叠加。那当然我们也说过了，如果你加个探测器，那你会算出来它真的就是有两个输出。

现在一切的问题就成了对于什么样的情况，你需要用矢量叠加，对于什么样的情况，你需要用概率叠加。然后，给你补充上，有了矢量叠加的数学你怎么算，有了概率叠加的数学你怎么算。概率叠加的数学我们前面已经算过了，所以我们只用补充，你有了矢量叠加的数学你怎么算，故事就完了。这就是所有的量子力学。

所有的这一系列的实验，每一个你都是解释不通的，用经典的牛顿力学也好，用经典的概率论也好，都是解释不通的。而且，我已经启发你，能解释通的一个方法就是，允许做矢量叠加，而不是概率叠加。当然还有一个问题，说这世上有没有别的理论，我既不用矢量叠加，我又能解释这个实验。那寻找这样的理论的科学家也是有的。其中一个典型的代表就是Einstein。Einstein说上帝是不掷骰子的，月亮在你不看的时候还是在的。意思就是要尽量地去避开矢量叠加，甚至避开概率叠加，这个让人特别想不通的地方，只有确定性（我们知道经典的随机性都可以理解成确定性加上信息不完全）。

为什么矢量叠加特别想不通，以后我们讲量子测量的问题的时候，会回到这个东西，就是加了矢量叠加以后，你会发现理论上都能算了，算出来都是跟实验能够对上了，可是它有很多很多令人迷惑的想不通的地方。而以Einstein为代表的那一拨科学家，他们希望避免这些想不通的地方，希望

你的理论还像经典力学一样。所谓像经典力学就是，我看见一个车停在那儿，那个车它自己就停在那儿，不是因为这个车在我看之前，我不知道停在哪里，它在任何地方都有一个概率分布，然后我看的时候它停在那儿，能区分开这两种情况吗？他不想要后面这种。

就是说他认为客观现实是个很好的东西，我希望尽量保持有一个东西叫客观现实。然后，他认为如果我允许了矢量叠加，我就破坏了这个客观现实。当然，后来的量子力学的研究告诉你，它其实破坏的是另外一个东西，不是真的是一个破坏了客观现实，它是客观现实和另外一个叫做局域性的东西没法同时存在。我就不展开了。就是说它其实没有破坏了这么多，但是它确实破坏了一些东西。以后我们会讲那个破坏的东西是什么，让人理解不了的东西是什么。但是，在那之前，我们先学会所有的计算。反正，经典的我们已经学会了。我们只要在那上面稍微地修改一点点，就会了量子的计算，所有的实验你都能解释了。你随便给我一个新的场景，我只要算一下，我也算出来的结果也会是和实验相符的。

先完成这个目标。我们再来看这样的理论有什么用。然后，看这样的理论有什么问题我们还想不通。那后续的任务也明白了。

了解了经典概率论的数学形式，和量子力学不能由经典概率论，也不能由牛顿力学，所解释的这些现象之后，你就可以去看很多的物理的书、视频，并且能够理解得非常的到位，非常的透彻。其中有几个特别推荐的就是 Coleman 的量子力学讲座，叫《Quantum Mechanics in Your Face》，讲得特别好，如果你把它直译过来叫做“打你脸的量子力学”，这个讲得特别好。第二个是 Susskind 的量子力学公开课 [?]，这个也讲得非常好。你还可以去看一下 Feynman 物理学讲义的第三卷 [?] 的第一章、第二章，它的主要的思路，跟我的这个课程非常非常的像，也是先告诉你有哪些事实，是不能由经典的理论解释的，再告诉你量子的理论是什么样的，为什么它们是可以解释的，最后回到量子理论大概有什么用，以及还没有解决的问题。

顺便，Susskind 的整个量子力学公开课，思路也是差不多的，所以，你现在基本上有了这个基础，都可以去看一看，都能看懂了。

我们下一步的任务就是，给出来描述电子和光子状态的数学形式，然后把这个所谓的最重要的东西，就是叠加性，也就是矢量相加，让它真正的在解释量子现象当中，给你展示一下，是如何发挥作用的。那顺便还有一个要完成的任务，叫做量子系统的状态，它是怎么演化的，它是由什么原因来决定它的变化的。这个事情，我最多只给你展示一下，你看一眼，大概知道怎

么回事就可以了，不做要求。但是，如果你真的完全不讲它，可能有些地方的理解，还会有一点欠缺，我们说了力学的世界观就是状态的描述是什么，状态会不会发生变化，变化是什么原因导致的。这几个问题，我们大概都会回答一下。然后有了这个数学之后，我们来解决量子的状态，到底有哪些神奇的地方，有哪些还没有回答的问题，以及可以用来干哪些更加神奇的，跟你的经典的世界，完全不一样的事情。

3.11 本章小结

我们也顺便把迄今为止，在这门课里学过的所有的东西都复习一下。第一个叫做力学的世界观，也就是刚才说的，状态的描述以及状态是否发生变化，变化的话发生的原因是什么，然后还有一个就是有了状态之后，我对这个状态做测量，我会观测到什么事情，测量到底是怎么算的。

第二个就是关于什么是科学，一会儿我会补充的更加详细一点，但是最主要的事情就是，科学是给现象建立起来一个可计算的数学模型，而且算出来的结果，原则上需要是可验证的，或者至少，不是，如果不是完全能够验证得过的话，那至少是可证伪，并且没有被证伪的。

然后我们还通过前面的实验知道了，光子如果看作要么走这条路，要么走那条路，无论在哪个实验里头，都是不能解释我们观测到的现象的。可是呢，它又不能同时走两条路，因为第一，我们实验当中测出来的所有的能量，都不会比这个单个光子的能量更低的，它不会劈开的。然后第二，你如果真的去测一下，你会发现它的实验上的行为就会改变，跟你观测到的是不一样的，所有的这些，我们一会儿都要去展示一下是怎么算的。

我们还知道经典的光学，是可以解释这些现象的，那经典的光学是怎么解释的呢？它是把光看成一束光波，然后把它看成其中的一小束走了这个，另外一小束走了这个，然后将来在某个地方重新合起来，接着用波峰和波谷叠加的相对位置，来解释这个干涉现象，以及其他更加复杂的现象。

那我们说这样的解释，在单个光子和单个电子的行为里头，也是不对的，因为它绝对不可能再出现，你拉着我我拉着你出现的，这个波峰波谷的事情了。它每一个，都是不和别的东西发挥作用的，它都是只有自己跟自己发挥作用的。或者说回到最开始的，光过玻璃的实验的时候，它是一个球要么被弹走了，要么就通过下面才被弹走，它两个事情只能发生其中的一个的。也就是说你绝对不能想象，这两件相互排斥的事情，发生了一件就不可

能发生另外一件的事情，它们俩是会以某种方式相互作用起来的。然后我们还发现，如果我们用经典的粒子来解释，不用经典的波，也就是用经典的概率论来解释，其中的很大一部分现象是可以解释的，但是有一大类现象也是不能解释的。

所以，我们实际上要寻找的东西，是数学上很像很像单个的粒子的，就是很像经典概率论的东西，可是又允许我们去做像波一样的东西的，波最核心的东西就是，波峰和波谷的叠加。所以，我们需要找一个像概率论的东西，但是又允许我们把状态叠加起来的东西。

同时我们还学习了，左矢和右矢的 Dirac 符号，那这个符号迄今为止，我们总是把右矢和左矢配在一起用的，比如说 $|1\rangle\langle 1|$。我们把它整体认读，认为它是状态 1 的意思。而前面如果写一个 P_1，就是指状态 1 出现的概率是 P_1。一会儿我们要突破这个整体认读。我们要把这个左矢和右矢它自己当成一个有意义的东西。然后，我们也发现在经典状态的情况下，左矢和右矢永远有正交性，就是的性质 $\langle i|\, j\rangle = \delta_{ij}$。也就是说经典的世界，永远是相互不包含的：经典的基础事件，要么完全一样所以 $\langle i|\, i\rangle = 1$，要么它们俩完全不一样所以当 $i \neq j$ 的时候 $\langle i|\, j\rangle = 0$。也就是说，硬币的向上态完全不包含硬币的向下态。如果它们俩乘起来内积不等于 0，就表示我这个矢量里有这个矢量的成分。你算过 $|1\rangle$ 和 $|0\rangle$ 这两个矢量，你去做内积，做相乘，它们俩是等于 0 的。将来会发现，而描述量子状态的矢量 $|\uparrow_z\rangle$ 和 $|\uparrow_x\rangle$ 做内积是不等于 0 的。

也就是说在经典的世界里头，硬币只分向上态和向下态，并且硬币的向上态，永远它跟向上态是一模一样的，和向下态是完全没有纠葛的，没有任何重叠的。因此，任何经典纯态之间要么完全重合，要么完全没有重叠。

将来，我们就发现，我们只需要突破这一条——“量子状态之间不一定完全重合或者完全没有重叠”——就可以了，其他的所有的数学都是一模一样的。突破了这一条，就意味着我们允许，量子的状态，例如某个方向的向上态，同时包含了另外一个方向的向上和向下态。而这个东西怎么包含的呢？正好是因为这个矢量，它等于这个矢量加上那个矢量，例如

$$|\uparrow_z\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|\uparrow_x\rangle + |\uparrow_x\rangle\right), \tag{3.1}$$

所以将来你算内积的时候 $\langle\uparrow_z|\uparrow_x\rangle$ 才不等于 0。于是，

$$\langle\mu|_c\ \nu\rangle_c = \delta_{\mu\nu} = 1, 0, \tag{3.2}$$

$$\langle\mu|_q\ \nu\rangle_q = r\delta^{i\theta}. \tag{3.3}$$

也就是经典状态之间不存在矢量加法，只有概率加法，因此经典纯态之间的内积只能等于 1（完全相同）或者 0（完全不同）。但是，量子状态之间允许矢量加法，因此量子纯态之间的内积可能是一个绝对值为 [0,] 之间的复数（复数这一点暂时不用管，我们用的例子，都会尽量在实数范围内，也就是 $\theta = 0$ 或者 $\theta = \pi$）。

这是我们迄今为止在这个课里学过的，所有的实验，以及对科学的认知，以及数学的总结。

第四章 量子系统的数学模型——量子力学

现在，我们做好了正式开始讲量子系统的数学模型——量子力学的实验上和数学上的准备。再一次强调，这部分内容的学习需要前面的关于概率和矢量的数学，尤其是 Dirac 符号或者矩阵运算。两者你需要会其中之一。如果你还没有掌握这套数学语言，那这一章你可能很难靠思辨来学会。

4.1 科学家的科学史

在讲量子力学的数学形式之前，我来稍微补充一下，就是叫做科学家的科学史。科学家的科学史，和真正的科学史是不一样的。在科学家的科学史里头，所有事件发生的顺序都是逻辑顺序，不是历史顺序。很可能任何一个我说的事实都是错的，我只是说如果我照着这个科学发展自身的逻辑的话，大概你可以这么来看。当然实际上，科学家的科学史离真实的科学史差得也不是特别大，但是科学家的科学史，毕竟和真正的科学史是不一样的。

为什么要讲这个呢？这牵涉到另外一个问题：为什么我要构造这么一套奇怪的量子力学的数学来解释这个现象。这个东西牵涉到对科学是什么的非常深刻的认知，也就是说，我一会儿要给你解释的什么是科学以及科学史，就想告诉你，为什么我们不是去寻找那些你想想就能想明白的东西，把这样的东西叫科学，而是去找那些可能想不明白但是算出来的答案和实验相符的东西叫科学。当然，这也取决于你怎么定义那个“想”。如果有一天，你的想和这个算是等同的，就是说你想的东西已经抛弃了该抛弃的直觉，培养出来了该培养的直觉，想和计算相同了，那么这时候你说你想明白的东西就是科学，也没错。但是，大多数人，在所谓想的时候，你总是用了基于生活经验，或者其他一些没有数学表达式的，没有经过严格的理性的检验的直

觉的，那时候你怎么理解这个世界跟我没关系，你想不想得通不是我的事，不关科学的事。

现在来看一下科学家的科学史，大概是什么样子的。有人说过，人类有科学才是一件神奇的事情，没科学才是一件正常的事情。很大程度上，我觉得这句话说的是有道理的。当然我觉得长期来看的话，必然会有科学。但是，它真的很偶然，很难很难才出现的。你想，在大家每个人都在关心明天吃什么的时候，能不能打到一个鸟、一个羊的时候，有人竟然开始思考说，“我们这个世界是从哪里来的”，“我们这个世界是不是无限可分的”，“我们这个世界是不是可以还原成，一堆最基本的东西，然后由那堆最基本的东西组合起来，就可以回答所有的问题”。

怎么可能，只有那拨在古希腊的“傻缺”们，他们才把这个思辨的传统留了下来，一天到晚问这个没有意义的问题。甚至，就算古希腊留下来了这个传统，历史上也非常悲惨的。绝大多数历史上后来的和今天的希腊人，不是继承古希腊这个传统的人。整个这一支，是一支特别神奇的、能够比较好地保留下来的一支——用思辨的方法来理解自然界，还不是用思辨的方法纯粹来理解思辨——的人。所以，这是非常了不起的。这样的包括比如说像，苏格拉底、泰勒斯，一直到后来柏拉图以及柏拉图的学生亚里士多德。

在亚里士多德手上，他基本上就使得，对于思辨本身的思辨，和对于自然界的思辨分开了。也就是说他第一次基本上，认为这个物理学该是个什么，他认为该是对自然界的现象的思辨，而不再是所有的思辨都放在一起了。所以，我们物理学就不再包含在哲学里头了，基本上有了自己的战场。然后非常遗憾地从那儿开始了一下就消失了。所有的这个传统就不知道为什么没了。一直到后来有一个叫文艺复兴的事情，它把所有的这堆东西又都复活了。我也不知道为什么，应该去请教一下研究历史的人，这到底是怎么发生的。

但是从那以后，有一些人提出来，比如说，笛卡尔提出来一个东西叫批判性思维。他最有名的一句话，大意是，凡是没有经过我自己的理性检验的东西，我不能当成我进一步思考的基础。顺便，有兴趣的可以去看一下笛卡尔的这本书，叫《谈谈方法》[?]，他里头提出了四条，他认为对于批判性思维非常重要的，我引用的只是其中的一条，还有其他的几条。

除了他之外，跟科学复兴非常有关系的还有几个人。第一个比如说伽利略，尽管亚里士多德非常神奇地，把物理学跟哲学分开了，但是他同样非常神奇地，把所有的物理学的知识都弄错了。这其实不重要，分开更重要。但

是，他毕竟把知识本身都弄错了，这也是很神奇的事情。比如说什么来着，东西不推它就不动。确实，这个桌子我要不推就不动，挺好的。但是，难道人家那时候就没冰吗？我想不通，你要上冰上滑一下，这个结论就错了，我什么也不推的时候，你在冰上呼溜溜地走，所以我也不知道。

比如说越重的东西落得越快，又是错的。所以，这个人也挺神奇的，所有的具体知识都是错的。如果我们一直停留在纯粹思辨，尽管我们已经开始对自然界做思辨了，那我们也是非常愚昧和非常悲惨的，谁把我们拯救了出来，就是那个叫伽利略的人，他说，别着急，我们测一下。当然，也有可能他是因为做实验的功底特别高，听说他发明了望远镜和摆钟。所以，有可能是他做实验的功底特别高，反正由于各种原因，他就把我们拯救了。拯救的效果是什么呢？他说你想看看到底不推它是不是不动，对不对？来，我给它铺个毛巾，铺个光滑的斜面，然后你就让一个东西落下来。他说落到最后总没有力了吧，我看看它还能不能走，发现走挺远的。所以，他那时候相当于是，综合了一个叫批判性思维的东西，加上做实验的东西，再结合亚里士多德已经完成的把物理学从哲学的纯粹思辨分开这一步。

如果我们只有这样，那我们现在的科学家在干什么呢，就这样呗，你有什么东西觉得不对，做个实验测一下。当然，这也没什么不好的，可能很多学科一开始都是这么发展的。也就是说你想解决任何问题，我的基本方法就是，来呀，你把场景给定，你做一下实验，于是我会得到很多的实验事实。

在牛顿之前，物理学就是这么回事，很多人得到了很多实验事实，很多观测记录。Newton这个非常神奇的人他说，我得把它整出个体系，让所有的知识有系统，我只需要少数的几个东西，就可以把其他东西都知道。这条从哪借过来的，从那借过来的。顺便，能够提出来公理化体系又是另一件神奇的事情。那么有了这一条之后，Newton就需要去找，我那个当成基础的是哪几条啊？我把那些东西找出来当成基础之后，那几条我又怎么把我现在的观测记录都推出来呀？所以他更加神奇的事情竟然是，不仅想起来用数学模型去描述，用有体系的数学知识去描述自然，他还非常神奇地，自己找到了解决这个问题的数学工具——微积分。他独立地发明了提出了微积分。于是，他还能用微积分来帮他自已解决这个问题，这才是使得我们整个科学走到了这样一条道路，什么道路呢？

首先我们要靠做实验和做计算来做检验，来做批判性思维，接着我们要做有体系的数学模型，然后我们唯一的标准，只需要我们算出来的东西，和我们观测到的东西是一样的。这就是现代科学的道路：测量、建模、计算分

析求解、检验、系统化。

当然后面有更多的现代科学家，比如说像爱因斯坦、杨振宁、费曼等等这些人，我们就不再展开了，因为从那以后，基本上整个什么是科学，都一直没有变过。

当然，我们现在可能站在更高的角度，来企图去把整个科学做得更加的一致，也就是说把所有的科学放在更加少的基础之上。比如说，我提到过的物理学家的梦想，就是希望我们写下一个方程，从这个最基本的方程里我们可以得到所有的具体系统的物理学的方程。也就是说我们希望，这个世界特别干净，所有的一切行为，都是某个本质上相同的东西，通过不同的排列组合而得来的。我们离这个梦想还是有点距离。由于有了这个梦想，我们更多的从时间和空间，还有对称性的角度去理解整个物理学，这是另外一件事情。也就是从具体的物理学的知识，或者科学的知识上来说，我们显然往前走了很多很多。但是，从什么是科学上，基本上我们没有离开牛顿多远。只是说以前当你不学习量子力学的时候，你对科学不这么看，也没有太大所谓，你觉得科学就是把你的直觉，用某个方式去思考个问题，然后通过逻辑思辨，建立起对世界的认识，也凑合着可以。但是一旦你把这样的认识，放到量子力学的时候，你就发现它不行，它必须退到我刚才说的那个科学是什么。也就是说我们不得不在很大程度上牺牲对这个世界的直觉的认识，除非我说过了，有一天你的直觉已经经过培训，变成了那个该留下的留下来，不该留下的不留下来，那你的直觉还是管用的。

4.2　矩阵、算符和本征态，选读

在真正开始讲量子系统的数学形式之前，我们还需要补充一点点数学知识：本征矢量，也叫本征态和本征值。我们在 2.4.1 节已经学习了 Dirac 符号和 2×2 矩阵运算。其中，我们了解到 Dirac 符号表示的算符和矩阵完全等价，并且也学会了矩阵乘法，或说算符和矢量之间、算符和算符之间的乘法。今天，我们来用算符和矢量之间的乘法为基础介绍一个矩阵的内秉的矢量——也就是完全由矩阵本身已经定义好的矢量。

先举个例子。考虑这样一个算符

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \hat{\sigma}_z = |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|, \tag{4.1}$$

我们可以验算一下，

$$\sigma_z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{4.2}$$

$$\hat{\sigma}_z \left|1\right\rangle = \left|1\right\rangle, \hat{\sigma}_z \left|0\right\rangle = -\left|0\right\rangle. \tag{4.3}$$

我们发现，这样的矢量具有一个特点，

$$A\mu = \lambda\mu, \hat{A}\left|\mu\right\rangle = \lambda\left|\mu\right\rangle. \tag{4.4}$$

进一步对比一下公式 (4.1) 和公式 (4.3) 的 Dirac 符号形式，你还会发现，其实，$|1\rangle$ 和 $|0\rangle$ 已经直接就是用来定义算符 $\hat{\sigma}_z$ 的那一组基矢量。因此，我们把满足公式 (4.4) 的非零矢量称作算符 $\hat{A}$ 或者说矩阵 A 的本征矢量。其中出现的那个常数 λ 就称为本征值。注意，本征矢量和本征值是配对的，换一个本征矢量有可能会对应着不同的本征值，就好像这里的 ±1 和相应的 $|1\rangle$ 和 $|0\rangle$。有的时候，为了明确表示本征态和本征值之间的对应关系，我们也把相应的本征态就记做 $|\lambda\rangle$。例如，在这里，我们可以把 $|0\rangle$ 重新记做 $|-1\rangle$。

本征矢量可以起到用来定义算符（矩阵）的作用，在一个算符（矩阵）自己的本征矢量下，这个算符（矩阵）只有对角元。

那，给定一个矩阵怎么把这样的本征值和本征态求出来呢？对于 2×2 矩阵，这是一个容易的任务，更复杂的咱们用不到就暂时不管了。从 公式 (4.4) 我们得到，本征值和本征向量满足

$$(A - \lambda I)\mu = 0. \tag{4.5}$$

由于我们要求 μ 不能全等于零，因此，系数矩阵必须满足如下要求，

$$\det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0. \tag{4.6}$$

也就是

$$(A_{11} - \lambda)(A_{22} - \lambda) - A_{12}A_{21} = 0. \tag{4.7}$$

这是一个关于本征值 λ 的一元二次方程。算出来本征值 λ 之后，就可以代入到公式 (4.4) 得到本征矢量。

我们用 σ_z 当例子来展示一下这个计算过程。先计算本征值，也就是把 σ_z 的具体形式代入到公式 (4.7)，得到

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) - 0 \times 0 = 0 \Longrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm1. \tag{4.8}$$

再把本征值代入到公式 (4.4) 得到本征矢量，例如代入 $\lambda = 1$，则

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mu = \mu \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

也就是二元一次方程组

$$1 \times x + 0 \times y = x, \tag{4.10}$$

$$0 \times x - 1 \times y = y. \tag{4.11}$$

从而得到解

$$x = r\text{（任何数）}, \tag{4.12}$$

$$y = 0. \tag{4.13}$$

于是，本征值 1 相应的本征态为

$$|1\rangle \Longleftrightarrow r \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

同理可得本征值 -1 相应的本征态为

$$|-1\rangle \Longleftrightarrow r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

在物理学家的习惯中，一般还要对本征矢量做一个归一化，也就是保证其长度等于 1，$\langle \mu | \mu \rangle = 1$。按照这个习惯，算出来这里的 $r = 1$。

学习了本征态的概念和计算之后，我希望你可以稍微做几个练习。例如试试算出来下面几个矩阵的本征值和本征向量。

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \hat{\sigma}_x = |1\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1|, \tag{4.16}$$

$$\sigma_x + \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow |1\rangle \langle 1| - |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle 1|. \tag{4.17}$$

我们一起来完成第一个 σ_x 的本征值和本征矢量。第二个留给大家当作业。先计算本征值，也就是把 σ_x 的具体形式 公式 (4.16) 代入到公式 (4.7)，得到

$$(0 - \lambda)(0 - \lambda) - 1 \times 1 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \pm 1. \tag{4.18}$$

再把本征值代入到公式 (4.4) 得到本征矢量，例如代入 $\lambda = 1$，则

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mu = \mu \Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{4.19}$$

也就是二元一次方程组

$$0 \times x + 1 \times y = x, \tag{4.20}$$

$$1 \times x + 0 \times y = y. \tag{4.21}$$

从而得到解

$$x = r\text{（任何数）}, \tag{4.22}$$

$$y = r. \tag{4.23}$$

于是，本征值 1 相应的本征态为

$$|1\rangle \Longleftrightarrow r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

同理可得本征值 -1 相应的本征态为

$$|-1\rangle \Longleftrightarrow r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{4.25}$$

在物理学家的习惯中，一般还要对本征矢量做一个归一化，也就是保证其长度等于 1，$\langle \mu | \mu \rangle = 1$。按照这个习惯，算出来这里的 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$。

2 × 2 矩阵的加法和乘法计算，求本征值和本征向量（实际上背后用到的是一元二次方程和二元一次方程组），是本书用到的最复杂的计算了。这些计算实际上都不超过初中水平，甚至好的小学生，也可以学懂这些计算。

如果你不学懂这些计算，那你就不得不完全依靠你的思辨来做进一步的学习，而思辨是非常不可靠的。强烈推荐你花时间学懂这一节选读和上一节选读也就是 2.4.1 节。

4.3 量子理论的数学形式

那么讲了实验，概率论的矢量形式，什么是科学，这些东西之后，我们下面就真的要开始讲，量子力学的数学形式是什么了。然后，我们会用这个数学形式来解释所有的之前我们解释不了的实验。如果可以的话，我也会去挑战一下，帮助你一起去思考一下，为什么量子力学的数学，非得长成这个

奇怪的样子。看情况，如果说这个问题太难，反正我只需要知道，这里有这么个问题，你只需要知道这里有这么个问题就可以了，不需要真的能够做到去思考这个问题。所以，我先给你解释这套数学，再用于解释量子现象，也会讨论一下在用这套数学来解释现象的时候还有哪一些问题。同时，由于确实还有这些问题，我们会来尝试构造一个没有这些问题的理论来解释量子现象，以及展示一下这样的尝试为什么不成功。最后，我会告诉你，用这套数学来展示一下量子态的远程传输是怎么回事。更多的量子信息的新的实验怎么理解，就不再展开论述。

我们开始真的学习量子力学，把之前的概率论的矢量的形式，稍微地推广一下，就成为量子力学的数学形式。第一个，我们需要介绍的东西叫基矢量，基矢量是什么呢？就是如果你是一个 xy 平面内的东西，那么任何一个矢量可以写成 (x, y) 一对数，其中 x 表示它在 x 方向的分量，y 表示在 y 方向的分量。也就是说比如说一个 $\vec{r}$ 方向的矢量，它可以分解成什么呢？它可以看作一个 x 方向走了 x 这么长，加上 y 方向走了这么 y 长的两个矢量的叠加。所以，我把它写出来，就是，

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = x\hat{i} + y\hat{j} \tag{4.26}$$

那个 $\hat{x}$（也记做 $\hat{i}$）就是 x 方向的一个基矢量的意思，$\hat{y}$ （也记做 $\hat{j}$）就是 y 方向基矢量的意思。公式 (4.26) 这个就是最基本的东西。那么有了这个公式 (4.26) 之后，你就会发现，如果我要做一个 $\vec{r} = (x, y)$ 矢量，到另外一个 $\vec{r}' = (x', y')$ 矢量，它们的内积就是

$$\begin{aligned}(\vec{r}, \vec{r}') &= \left(x\hat{i} + y\hat{j}\right) \cdot \left(x'\hat{i} + y'\hat{j}\right), \\ &= xx'\hat{i}\cdot\hat{i} + xy'\hat{i}\cdot\hat{j} + yx'\hat{j}\cdot\hat{i} + yy'\hat{j}\cdot\hat{j}, \\ &= xx' + yy'.\end{aligned} \tag{4.27}$$

在这里，我们用到了方向矢量之间的内积

$$\hat{i}\cdot\hat{j} = \delta_{ij} \tag{4.28}$$

也就是 x 方向的矢量和 x 方向的矢量完全重合，但是和 y 方向的矢量完全没有重叠。

如果我们用 Dirac 符号来计算，则上面的运算成了

$$\begin{aligned}\langle r| r'\rangle &= (x\langle 1| + y\langle 1|)(x'|1\rangle + y'|0\rangle),\\ &= xx'\langle 1| 1\rangle + xy'\langle 1| 0\rangle + yx'\langle 0| 1\rangle + yy'\langle 0| 0\rangle,\\ &= xx' + yy'.\end{aligned} \tag{4.29}$$

在这里，我们用到了抽象矢量之间的内积

$$\langle i| j\rangle = \delta_{ij}. \tag{4.30}$$

如果我们用矩阵的符号来计算，则上面的运算成了

$$(\vec{r}, \vec{r}') = \begin{bmatrix} x, y\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y'\end{bmatrix} = xx' + yy'. \tag{4.31}$$

内积就是两个矢量长度相乘然后再乘以两个矢量的方向的匹配度——严格来说，就是两个矢量之间夹角的余弦值：如果两个方向完全相同就得到 1，完全垂直就得到 0。

这些都是你在前面的数学部分学习过的知识。现在，我们不过就是把来阐述同一种意思的几种不同的符号等同起来。严格来说，当把一个右矢量 $|r\rangle$ 变成左矢量 $\langle r|$ 还需要对每一个元素做一个复共轭，也就是 $\begin{bmatrix} x \\ y\end{bmatrix}$ 变成 $\begin{bmatrix} x^*, y^*\end{bmatrix}$。但是，由于我们的计算中基本上都只有实数，我们可以暂时忘掉复共轭这一步。

我们再复习一下经典状态及其测量的数学形式。

1. 经典状态有正交关系，

$$\langle i| j\rangle = \delta_{ij}. \tag{4.32}$$

2. 经典状态由概率分布函数描述，其 Dirac 符号形式为，

$$\rho^c = \sum_s P_s |s\rangle\langle s|. \tag{4.33}$$

例如经典硬币的状态为 $\rho^c = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \frac{1}{2}|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$。

3. 经典物理量由算符描述，其 Dirac 符号形式为，

$$A^c = \sum_s A_s |s\rangle\langle s|. \tag{4.34}$$

例如遇到硬币正面获得 2 元，反面失去 5 元，则 $A^c = 2|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - 5|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$。

4. 在状态 ρ^c 下测量物理量 A^c，得到的平均值为

$$\langle A^c\rangle_{\rho^c} = Tr(A^c\rho^c) = \sum_s P_s E_s. \tag{4.35}$$

例如按照上面的状态和收益规则，我们可以获得 $\langle A^c\rangle_{\rho^c} = Tr(A^c\rho^c) = \frac{1}{2}\times 2 + \frac{1}{2}\times(-5) = -1.5$ 元。

5. 测量后状态，如果一个测量得到了被测量物理量的记录值 s，则系统在测量之后将处于如下状态，

$$\rho^c_{afm} = |s\rangle\langle s| \sim |s\rangle\langle s|\rho^c_{bfm}|s\rangle\langle s|. \tag{4.36}$$

其中的第四条也表示，如果我们测量的物理量正好就取 $A^c = |s\rangle\langle s| \triangleq \hat{P}_s$ 的特殊情况，也就是测量仪器仅仅对某个特定状态有反应，则 $P_s = \left\langle\hat{P}_s\right\rangle_{\rho^c} = Tr(|s\rangle\langle s|\rho^c) = \langle s|\rho^c|s\rangle = P_s$。也就是说，公式 (4.35) 不仅仅可以用来计算概率平均值，还可以用来计算单个事件的概率，只要用相应的测量物理量算符代入这个公式。例如，我们可以算一下在 ρ^c 这个状态下的硬币正面向上的概率，也就是取 $A = \hat{P}_\uparrow = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$，则 $P_\uparrow = \langle\uparrow|\rho^c|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}$。

有了这套数学，复习了经典状态及其测量的数学形式，我们来看量子系统的状态及其测量的数学形式。

1. 量子状态没有正交关系，也就是

$$\langle\mu|\,\nu\rangle \neq \delta_{\mu\nu}. \tag{4.37}$$

但是，量子状态可以写成基矢量的叠加，

$$|\mu\rangle = \sum_i \mu_i |i\rangle. \tag{4.38}$$

而同一组基矢量（记作 $\{|1\rangle, |2\rangle, \cdots\}$）内部的各个基矢量之间仍然存在正交关系，

$$\langle i|\,j\rangle = \delta_{ij}. \tag{4.39}$$

关于矢量叠加和基矢量、同一组基矢量之间的正交关系，读者可以借助二维平面上的矢量和基矢量来理解。以 z 方向向上状态和向下状态为基矢量，则 x 方向向上状态可以表示为 $|\uparrow_x\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}|\uparrow_z\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2}|\downarrow_z\rangle$，其中 $\langle\uparrow_z|\uparrow_z\rangle = 1, \langle\uparrow_z|\downarrow_z\rangle = 0, \langle\downarrow_z|\uparrow_z\rangle = 0, \langle\downarrow_z|\downarrow_z\rangle = 1$。

2. 量子状态由密度矩阵描述，对于这个状态自身的基矢来说，其表达式仍然为

$$\rho^q = \sum_s P_s |s\rangle \langle s| . \tag{4.40}$$

其中 $|s\rangle$ 由于满足 $\rho^q |s\rangle = P_s |s\rangle$ 正好就是之前我们学习的本征态。但是，由于公式 (4.38) 带来的 $|\mu\rangle = \sum_i \mu_i |i\rangle$，也就是一个矢量可以用其他基矢量来展开，在另一组基矢量下其 Dirac 符号形式为，其 Dirac 符号形式为，

$$\rho^q = \sum_{ij} \rho_{ij} |i\rangle \langle j| . \tag{4.41}$$

例如 x 方向向上态表示为 $\rho^q = |\uparrow_x\rangle \langle\uparrow_x| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} |\uparrow_z\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} |\downarrow_z\rangle\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \langle\uparrow_z| + \frac{\sqrt{2}}{2} \langle\downarrow_z|\right) = \frac{1}{2} |\uparrow_z\rangle \langle\uparrow_z| + \frac{1}{2} |\uparrow_z\rangle \langle\downarrow_z| + \frac{1}{2} |\downarrow_z\rangle \langle\uparrow_z| + \frac{1}{2} |\downarrow_z\rangle \langle\downarrow_z|$。

3. 量子物理量由算符描述，对于这个物理量自身的所有状态来说，其表达式仍然为

$$A^q = \sum_\mu A_\mu |\mu\rangle \langle\mu| . \tag{4.42}$$

但是，由于公式 (4.38) 带来的 $|\mu\rangle = \sum_i \mu_i |i\rangle$，也就是一个矢量可以用其他基矢量来展开，在另一组基矢量下其 Dirac 符号形式为，

$$A^q = \sum_{ij} A_{ij} |i\rangle \langle j| . \tag{4.43}$$

例如我们规定测量获得 z 方向向上则获得 2 元，获得 z 方向向下则失去 5 元，则 $A^q = 2|\uparrow_z\rangle \langle\uparrow_z| - 5|\downarrow_z\rangle \langle\downarrow_z|$。如果我们用另一组基矢 $\{|\uparrow_x\rangle, |\downarrow_x\rangle\}$ 来表示，则 $A^q = -\frac{3}{2} |\uparrow_x\rangle \langle\uparrow_x| + \frac{7}{2} |\uparrow_x\rangle \langle\downarrow_x| + \frac{7}{2} |\downarrow_x\rangle \langle\uparrow_x| - \frac{3}{2} |\downarrow_z\rangle \langle\downarrow_z|$。

4. 在状态 ρ^q 下测量物理量 A^q，得到的平均值为

$$\langle A^q\rangle_{\rho^q} = Tr(A^q \rho^q) . \tag{4.44}$$

例如按照上面的状态和收益规则，我们可以获得 $\langle A^q\rangle_{\rho^q} = Tr(A^q\rho^q) = Tr\left[\left(-\frac{3}{2} |\uparrow_x\rangle \langle\uparrow_x| + \frac{7}{2} |\uparrow_x\rangle \langle\downarrow_x| + \frac{7}{2} |\downarrow_x\rangle \langle\uparrow_x| - \frac{3}{2} |\downarrow_z\rangle \langle\downarrow_z|\right) |\uparrow_x\rangle \langle\uparrow_x|\right] = -1.5$ 元。

5. 测量后状态，如果一个测量得到了被测量物理量的记录值 A_μ，则系统在测量之后将处于如下状态，

$$\rho^q_{afm} = |\mu\rangle \langle\mu| \sim |\mu\rangle \langle\mu| \rho^q_{bfm} |\mu\rangle \langle\mu| . \tag{4.45}$$

其中的第四条也表示，如果我们测量的物理量正好就取 $A^q = |\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x| \triangleq \hat{P}_{\uparrow_x}$ 的特殊情况，也就是测量仪器仅仅对某个特定状态有反应，则 $P_{\uparrow_x} = \left\langle \hat{P}_{\uparrow_x} \right\rangle_{\rho^q} = Tr(|\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|\rho^q) = \langle\uparrow_x|\rho^q|\uparrow_x\rangle = 1$。也就是说，公式 (4.44) 不仅仅可以用来计算概率平均值，还可以用来计算单个事件的概率，只要用相应的测量物理量算符代入这个公式。

对比经典态的数学表达和量子态的数学表达，我们发现，唯一的不同就是公式 (4.38)，其他都完全一样。在各自的本征矢量当做基矢的情况下，量子状态和量子算符的定义其实和经典状态和经典算符的定义完全相同。仅仅是因为量子状态存在加法，也就是公式 (4.38)，才导致了在量子状态和量子算符中会出现经典状态和经典算符没有的非对角元。

把经典和量子的状态和算符整合起来，我们发现，

1. 状态由密度矩阵（注意，密度矩阵允许有对角和非对角元，因此包含了密度分布函数）描述 ρ。
2. 物理量由算符 A 描述。算符 A 的本征值，例如 a（满足 $A|a\rangle = a|a\rangle$），给出来测量物理量 A 可能得到的值。
3. 在状态 ρ 下测量物理量 A，得到的平均值为
$$\langle A\rangle_\rho = Tr(A^q\rho^q). \tag{4.46}$$
4. 经典和量子的区别在于：量子状态可以是这些基矢量的任意的叠加，包含矢量叠加和概率叠加，而经典状态只能选择这一套给定的基矢量的概率叠加。

也就是说，除了最后一条，经典和量子的核心公式是完全相同的。这就是这套数学语言的威力，你不需要为从经典到量子的转变做任何其他改变，除了注意到“量子态可矢量叠加和概率叠加”而“经典态只能概率叠加”。有的时候，我们也更简单地称之为“量子态可叠加”、“量子态叠加原理”。

4.4 量子理论的数学形式用于解释量子实验

下面我们用这个理论来解释实验现象。你需要掌握几个特殊的矩阵 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$。其中 σ_x 和 σ_z 前面已经当例子学习过。

$$\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow i|\downarrow_z\rangle\langle\uparrow_z| - i|\uparrow_z\rangle\langle\downarrow_z| \tag{4.47}$$

由于牵涉到复数的计算，我们尽量不用。

按照前面本征矢量的计算，我们有

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle\right), \tag{4.48}$$

$$|\downarrow_x\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|\uparrow_z\rangle - |\downarrow_z\rangle\right). \tag{4.49}$$

把这个数学结果翻译成自然语言就是，x 方向向上态等于 z 方向向上态和 z 方向向下态之和，x 方向向下态等于 z 方向向上态和 z 方向向下态之差。

如果我们把 z 方向的状态看做是苹果，向上态表示好苹果，向下态表示烂苹果，那么我们发现一个好苹果加一个烂苹果竟然等于 x 方向向上态，一个基本上和苹果独立的东西的状态，比如说等于一个好香蕉。反过来，一个好苹果减去一个烂苹果，则成了一个烂香蕉。当然，你说，香蕉和苹果之间的距离比自旋的 x 方向和 z 方向好像更远，没问题，那就用红富士苹果和金冠苹果当类比。那这个现象，你在红富士苹果和金冠苹果之间也是不可想象的。

现在，我们用这样一套数学来解释自旋的实验。第一个实验是一个自旋过一个磁场的实验：一个自旋通过一个 z 方向的磁场，然后观测到它分成两块。第二个实验是一个自旋过两个相同方向的磁场 $z-z$ 的实验：一个自旋通过一个 z 方向的磁场，你把往下的那个摁住，只让往上的过去，再通过一个 z 方向的磁场，试验观测是它只能往上，我们算算答案是不是这样。第三个实验就是自旋 $z-x-z$ 实验：一个自旋通过一个 z 方向的磁场摁住向下的，让向上的接着通过一个 x 方向磁场，往下的摁住，再让它通过 z 方向的磁场，实验上观测到两个输出，我们看看算出来是不是正好是两个输出。如果这三个实验都对，那我们就解释了其中的一组实验。我们来算一下，它是不是真的是这个样子的。

在自旋进入第一个实验装置之前，我们不知道它的状态是什么，或者说你随便给一个任意的状态，但是你会发现，我既然过了第一个实验装置之后，它有两个输出，而且把结果统计之后确实是等几率的，我就能反推出来状态就是：$\frac{1}{2}$ 的时候是取 z 方向向上态，$\frac{1}{2}$ 的时候取 z 方向向下态。那么写出来，就是

$$\rho_1^c = \frac{1}{2}|\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z| + \frac{1}{2}|\downarrow_z\rangle\langle\downarrow_z|. \tag{4.50}$$

这个就是第一个实验结果，一个自旋过来，过第一个 z 方向的磁场，我就看两个输出结果，那么你可以写这个经典硬币是一模一样的状态。当然，我们

也可以写下一个跟经典不一样的，例如，

$$\rho_1^q = \frac{1}{2}\left(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle\right)\left(\langle\uparrow_z| + \langle\downarrow_z|\right). \tag{4.51}$$

不过无所谓，现在我们暂时把它写下一个跟经典一模一样的。

有了这个跟经典一模一样的之后，我们来看第二个实验。第二个实验是把 z 方向向下的堵住，只让它向上的出去，这时候相当于做了一次测量，测量记录的结果就是 z 方向向上。按照我们测量后状态的计算方式，公式 (4.36) 或者公式 (4.45)，无论按照经典还是量子的测量前状态计算，我们都有

$$\rho_{afm,z} = |\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z|, \tag{4.52}$$

注意，ρ_1^c 只有两个元素而 ρ_1^q 是有四个元素的，但是，用公式 (4.45) 算完之后，得到的状态也是上面的表达式。这就是我刚才前面说的那句话，任何一次测量，测量后的状态，就是那个被测量到的状态本身，只是我再也不这么说了，我以后用我的数学计算代替它，这个数学计算怎么表示呢，用公式 (4.36) 或者公式 (4.45)。这两个公式其实完全相同。

好了，当我把 ρ_{afm} 这样一个状态，再带到下一个 z 方向的磁场的时候，z 方向磁场的描述就是算符 σ_z。现在，我们去用状态 ρ_{afm} 和算符 σ_z 算一下测量的均值。我就发现什么呢？它的均值是 1，

$$Tr\left(\sigma_z\rho_{afm,z}\right) = 1. \tag{4.53}$$

如果进一步算一下向上态的概率和向下态的概率，也就是取 $A = \hat{P}_{\uparrow_z} = |\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z|$ 和 $A = \hat{P}_{\downarrow_z} = |\downarrow_z\rangle\langle\downarrow_z|$，我们发现

$$P_{\uparrow_z} = Tr\left(\hat{P}_{\uparrow_z}\rho_{afm,z}\right) = 1, P_{\downarrow_z} = Tr\left(\hat{P}_{\downarrow_z}\rho_{afm,z}\right) = 0. \tag{4.54}$$

也就是说，每次测量只能看到一个 z 方向向上的输出，而没有 z 方向向下的输出。

好了，所以第一和第二个实验就做完了。这两个实验，我这套理论给你的解释就是对的。注意，这些跳过去的计算步骤，我都希望你去补充完成，验算一下。顺便，如果发现我算错了，联系我[1]，我给你发奖励。

那我们现在来看第三个实验。第三个实验比较复杂：它是先让它过一个 z 方向磁场，摁住往下的，再过一个 x 方向的，摁住往下的，接着再 z 方向

[1]例如，通过电子邮件，wujinshan@gmail.com

的，看看有几个输出。我们现在已经会了第一阶段，也就是说从过了 z 方向的那个磁场之后，我们测量摁住下面之后的状态是什么，我们已经知道了。那个状态就是

$$\rho_{afm,z} = |\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z|, \tag{4.55}$$

所以我们从这个状态开始。

往下怎么算呢？往下你得去算一算测量的结果，测量结果怎么办呢？我们说了，同样摁住了往下的 x 方向的状态，而剩下的状态就是 x 方向向上的状态，也就是我们测量得到的记录是 x 方向向上上，而 x 方向往上的状态是什么呢？它是

$$\rho_{afm,z-x} = |\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|. \tag{4.56}$$

这个测量后的状态怎么算出来的呢？还是把 $\rho_{afm,z}$ 代到公式 (4.45) 里头去。

$$\begin{aligned}
\rho_{afm,z-x} &\sim |\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|\rho_{bfm,z}|\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|, &(4.57)\\
&= |\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x||\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z||\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|, &(4.58)\\
&= |\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|(\langle\uparrow_x||\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z||\uparrow_x\rangle), &(4.59)\\
&= \frac{1}{2}|\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|, &(4.60)\\
&\sim |\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|. &(4.61)
\end{aligned}$$

注意，现在这个状态还需要做一次 z 方向的测量，也就是，测量均值为

$$\langle\sigma_z\rangle_{\rho_{afm,z-x}} Tr(\sigma_z|\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|) = 0. \tag{4.62}$$

这时候你就发现，如果你去测，你得到的均值是 0，那有两个可能 1 和 −1。它得到均值是 0 意味着什么呢？意味着它在两个方向的输出是等几率的，所以它就告诉你，它将来有两个输出。如果进一步算一下每一个 z 方向的测量可能结果的概率，则

$$P_{\uparrow_z} = Tr(|\uparrow_z\rangle\langle\uparrow_z||\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|) = \frac{1}{2}, \tag{4.63}$$

$$P_{\downarrow_z} = Tr(|\downarrow_z\rangle\langle\downarrow_z||\uparrow_x\rangle\langle\uparrow_x|) = \frac{1}{2}. \tag{4.64}$$

也就是 z 方向向上和向下的概率都是 $\frac{1}{2}$，有两个输出，和实验结果相符。

这三个实验我们都得到了解释。第一个最简单的是可以用经典的来解释的，就是一个自旋打过来，经过一个 z 方向之后，它分成两束。第二个是

一个自旋打过来，分成两束，摁住那个往下的，但是过的时候，继续让它过 z 方向磁场，我发现经典和量子的数学形式都能解释。第三个比较复杂的是，先过个 z 方向磁场，摁住往下的，再过一个 x 方向磁场，摁住往下的，然后我再过个 z 方向磁场，它出现两个输出。这个实验不能又经典状态的数学来解释。

直观上，我们相当于把 z 方向的往下的状态先挑出去了，先摁走了，不许它出现了。然后后来经过一番操作，它又出来了，在经典的世界里头，这是不可能的。我们说了这好像是个类比，就是你把什么来着，红色的东西留下，蓝色的东西弄走。第二个，你把长方形的东西弄走，圆形的东西留着。完了之后，正常按照经典的，你应该留下来的是什么？红色的圆形，对吧。但是，你做实验的结果，它却出现了蓝色的东西。

可是我们现在的量子状态的数学形式告诉你，这解释很正常，就这么容易解释啊。

那解释的奇妙的点在哪呢？就在于这个神奇的东西，σ_z 它的本征态，它是 σ_z 的向上态和向下态的和——“加法，+”。回到经典硬币的颜色和形状，我们相当于告诉你什么呢？还原到原来的经典硬币的颜色和形状的语言，我们相当于告诉你说，其实呀，那个圆形的硬币，它其实是由一个红色的和蓝色的硬币构成的。形状和颜色之间不是独立的，我们一开始把蓝色的筛掉，变成了一个红色的东西，第二次我们再筛一次的时候，是把长方形的筛掉，留下圆形的。可是，你要注意，我们的数学告诉了你，圆形的东西其实是等于红色的加蓝色的。那你将来出现蓝色的一点儿也不奇怪呀。这个数学就是这样不奇怪呀，就是这么简单。你只要允许矢量是可以加起来的，它就能解释所有的实验，特别特别的简单。

但是，你在经典的世界中，从来就没见过

$$\text{圆形} = \text{红色} + \text{蓝色}, \tag{4.65}$$

或者说我们一直用的例子，

$$\text{好香蕉} = \text{好苹果} + \text{烂苹果}. \tag{4.66}$$

但是，我们这里的量子状态的数学则有

$$|\uparrow_x\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(|\uparrow_z\rangle + |\downarrow_z\rangle\right). \tag{4.67}$$

更多的实验的解释，我们下次课再说。在这次之前，我重新把前面布置的几个作业，重新布置一下。你再一次去看它，现在已经会用矢量来解释量

子现象，去看它和之前你不会是不一样的，之前你的目的是看出来问题在哪儿，知道哪些东西是经典的理论不能解释的，现在你再去看它，是知道，哦，什么地方这个矢量叠加性就发挥了作用，就能解释了。所以，再一次去把 Coleman 的《Quantum Mechanics in your face》[?] 看一遍。然后 Susskind 的量子力学公开课 [?]，前面几节课看一遍，《Feynman 物理学讲义》第三卷 [?] 看一遍，包括我在系统科学导引 [?] 里头讲的，量子力学专门的那些章节，你也可以去看一下。如果你真的是从这里，真的有了学习量子力学的好奇心，因为数学上真的我已经替你准备得差不多了，物理上也已经讲完了，这个时候，如果你真有心，我也可以推荐你去看一下，我写的那本《二态系统的量子力学》[?] 以及《Feynman 物理学讲义》[?]，那个时候你就真的能够把量子力学学会了，就是大概脑子里头先明白量子的现象是什么，量子的数学是什么，然后明白真的这样的数学能够解释这样的现象这个思路，再去看量子力学的书，和你顺着人家量子力学讲知识的书，无脑地去做、去计算、去看，那是完全不一样的感觉。

4.5 Which-Way 实验的解释

前面我们学习了量子的现象，然后跟经典的现象相区别，发现这些现象是用经典的概率论也解释不了，用经典的波动力学也解释不了，那我们发现如果要解释的话，需要的理论是一个长得像概率论，但是允许把状态加起来的东西。

我们也介绍了新的数学会是什么样，我们说其中最主要的事情就是状态可以加起来，比如说前面用它来解释的一个实验，那这个实验是 Stern-Gerlach 多个磁场方向的实验，我们就发现如果我们允许 z 方向的向上态，包含 x 方向的向上向下态，x 方向的向上态也包含 z 方向的向上和向下态，那么所有的实验结果就能得到解释。

好，那这个就是整个量子力学的理论最核心的地方，就是状态是可以加起来的，可以做矢量运算的。如果你要算，在这个状态下去测量某个量的值，怎么算呢？你把那个量写成一个算符 A，把那个状态写成一个密度矩阵 ρ，然后你去算这个 A 和 ρ 乘积以后的对角元的和，也就是求迹。

那还学会的一个东西是如果测量完了，你去问这个状态是什么，那计算的方法就是，你把那个记录下来的东西写成 $|m\rangle\langle m|$，放在 ρ 的左边，然后把 ρ 加在中间，在 ρ 的右边也写放上 $|m\rangle\langle m|$。

那我们顺便还提到了如果你要去关心状态的变化，状态的演化的话，还有一个东西叫，或者说叫做演化算符的东西。我们后面也会降到这个方程。你也把它看一眼。但是，我们不会去用它，只会大概用它理解一下后面所说的内容。

我们还注意到其实对于经典和量子来说，后面所说的三个公式，它是不会产生变化的，它都是一样的。也就是说经典概率论，除了它不允许向上态包含了任何向下态的成分，用数学的语言说就是它们两个矢量的内积为 0，除了这一点之外，相比于量子力学——它可以允许状态之间具有包含关系，矢量具有相加关系，内积不为 0 这一点——之外，剩下的三个公式全是一模一样的。

那如果你在听下半部分的时候，手上拿着我给你准备好的量子力学小抄，那你打印出来，会更加有帮助，因为我们会用到其中的这几个公式。

下面我们用量子力学的这一套符号体系，来算一下光子的 Which-way 实验，看一看一个过了 45^0 偏振片以后，只留下透过光的，然后接着过一个 0^0 的，然后反射以后，再重新聚合起来，再经过一个 45^0 的偏振片会有一个还是两个输出。我们说了这个实验上是肯定只有一个输出。而理论上呢，如果你按照概率来计算，这个光子要么走上面的路，要么走下面的路呢，它都应该是两个输出，所以按照概率叠加，它该是两个输出。反过来，如果你按照另外一套逻辑思辨，怎么办呢？你说相当于在 0^0 的偏振片的时候呢，把这两束光分开了，接着它们又加上反射镜回到同一个点的时候呢，又聚合了，所以相当于什么也没干，于是呢，它还应该是入射光的偏振方向，也就是一开始从 45^0 透过来的，那就还是 45^0 偏振。当 45^0 的偏振光遇到 45^0 的偏振片的时候，它只能透过去。

那么，这个时候就有了两个不同的逻辑上的答案。那我们说实验上的答案呢，只有一个输出。也就经典概率论是错的。那今天呢，我们来用刚才提到的量子的概率论的这四个公式来算一算，看一看是不是确实我们可以得到一个输出。

那计算的时候，我们要做的第一件事情就是写下来光经过第一个偏振分数器时候的密度矩阵状态的数学表述，那这个状态的数学表述就是

$$\rho = \left|45^0\right\rangle\left\langle 45^0\right|, \tag{4.68}$$

那这个 45^0 呢，又可以写成 0^0 和 90^0 的之和，也就是 45^0 的光呢，看作这

两个方向的偏振光之和,

$$\left|45^0\right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left|0^0\right\rangle + \left|90^0\right\rangle\right). \tag{4.69}$$

于是,展开一下,你会得到四项,

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\left(\left|0^0\right\rangle\left\langle 0^0\right| + \left|0^0\right\rangle\left\langle 90^0\right| + \left|90^0\right\rangle\left\langle 0^0\right| + \left|90^0\right\rangle\left\langle 90^0\right|\right). \tag{4.70}$$

顺便,你可以看出来它和经典的时候的不同:相比经典概率叠加状态,

$$\rho^c = \frac{1}{2}\left(\left|0^0\right\rangle\left\langle 0^0\right| + \left|90^0\right\rangle\left\langle 90^0\right|\right), \tag{4.71}$$

量子状态多出了两个非对角项,$\left|0^0\right\rangle\left\langle 90^0\right| + \left|90^0\right\rangle\left\langle 0^0\right|$。第一项左边看起来像 0^0,右边看起来像 90^0;第二项左边看起来像 90^0,右边看起来像 0^0。

比如说,我们管那个出射点叫 O,那么出射的时候,则量子系统的状态是

$$\left|45^0, O\right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left|0^0, O\right\rangle + \left|90^0, O\right\rangle\right). \tag{4.72}$$

在这里,我们补上了路径的标记 O。将来我们会考虑路径分开成 $1, 2$。

接来下,我们问这时候,我接着通过那个 0^0 的偏振分束器之后,我的系统的状态成了什么。我们说这时候它的状态呢,是 0^0 的偏振在第一条路径上,加上 90^0 的偏振在第二条路径上,也就是

$$\rho_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left|0^0, 1\right\rangle + \left|90^0, 2\right\rangle\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left\langle 0^0, 1\right| + \left\langle 90^0, 2\right|\right) \tag{4.73}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left|0^0, 1\right\rangle\left\langle 0^0, 1\right| + \left|0^0, 1\right\rangle\left\langle 90^0, 2\right| + \left|90^0, 2\right\rangle\left\langle 0^0, 1\right| + \left|90^0, 2\right\rangle\left\langle 90^0, 2\right|\right). \tag{4.74}$$

注意这里的加是把那个右矢量加起来,而不是概率的加。如果是概率的加,则状态就会成为

$$\rho^c = \frac{1}{2}\left(\left|0^0, 1\right\rangle\left\langle 0^0, 1\right| + \left|90^0, 2\right\rangle\left\langle 90^0, 2\right|\right). \tag{4.75}$$

我们接着问下面的问题,透过两个反射镜之后,重新聚合到这个末状态上那个点,光子的状态是什么。我们发现,经过反射镜之后,一号和二号两条路径已经再次不可区分了,记为路径 3(或者也可以重新记为路径 0),

$$\rho_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left|0^0, 3\right\rangle + \left|90^0, 3\right\rangle\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left\langle 0^0, 3\right| + \left\langle 90^0, 3\right|\right), \tag{4.76}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left|0^0\right\rangle + \left|90^0\right\rangle\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left\langle 0^0\right| + \left\langle 90^0\right|\right)\left|3\right\rangle\left\langle 3\right|, \tag{4.77}$$

$$= \left|45^0\right\rangle\left\langle 45^0\right|\left|3\right\rangle\left\langle 3\right|. \tag{4.78}$$

计算中我们用了用初中的数学“提取公因式”。所以，这个时候在进入最后一个偏振分束器之前，它的状态回到了 45^0 偏振。那当我把这个 45^0 偏振的光再经过一个 45^0 的偏振片的时候，自然就是完全通过。我们也可以算一下。对应着 45^0 的偏振片的测量的算符是，

$$\hat{P}_{45^0} = \left|45^0\right\rangle\left\langle 45^0\right|. \tag{4.79}$$

把它们俩乘起来做个迹，求一个对角元的和，你就发现

$$P_{45^0} = Tr\left(\hat{P}_{45^0}\rho_3\right) = 1. \tag{4.80}$$

也就是透过偏振片的概率正好等于 1。因此，它是透射光，而反射的那个光是完全没有的。所以，从这里我们就解释了刚才说的在量子的实验上，它肯定只有一个输出，并且只有透过去的那个。

我们还说了如果在这两个光路上加上探测器的话，它的结果就会不一样。我们也来算一下。那我们还用刚才前面的这几条，第一条是先写下状态，注意要用加和的方式，而不是概率和的方式。写下状态以后，再沿着这个光的传播，问每一个时间点的状态，在每一个路程当中的每个地方的状态，把这个状态写下来，然后再把这个状态写到进入最后的偏振片之前的 ρ 状态，把偏振片写成一个算符，把它俩乘起来做一个部分迹，求一个对角元的和，求一个迹，然后我们来看一看它到底得到什么，现在还一样。

我们还是从经过 45^0 的偏振片开始，

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\left(\left|0^0, O\right\rangle\left\langle 0^0, O\right| + \left|0^0, O\right\rangle\left\langle 90^0, O\right| + \left|90^0, O\right\rangle\left\langle 0^0, O\right| + \left|90^0, O\right\rangle\left\langle 90^0, O\right|\right). \tag{4.81}$$

那接着我们要经过一个 0^0 的偏振分束器，光子的状态成了

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\left(\left|0^0, 1\right\rangle\left\langle 0^0, 1\right| + \left|0^0, 1\right\rangle\left\langle 90^0, 2\right| + \left|90^0, 2\right\rangle\left\langle 0^0, 1\right| + \left|90^0, 2\right\rangle\left\langle 90^0, 2\right|\right). \tag{4.82}$$

但是要注意，因为我们这里加了个探测器，所以一号路径呢，它那个探测器叫第一号探测器 D_1，然后二号路径有个第二号探测器叫 D_2。于是，状态成了

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\left(\left|0^0, 1, D_1\right\rangle\left\langle 0^0, 1, D_1\right| + \left|0^0, 1, D_1\right\rangle\left\langle 90^0, 2, D_2\right| + \left|90^0, 2, D_2\right\rangle\left\langle 0^0, 1, D_1\right| + \left|90^0, 2, D_2\right\rangle\left\langle 90^0, 2, D_2\right|\right). \tag{4.83}$$

好，这时候我们说我们要看它再次聚合起来，聚合起来会怎么样，那我们把它重新就聚合起来。聚合起来以后，我们得到的是什么呢？把那个一号路径和二号路径变成零号路径，所以这个时候你得到的状态是，

$$\rho_3 = \frac{1}{2}\left(\left|0^0, 3, D_1\right\rangle\left\langle 0^0, 3, D_1\right| + \left|0^0, 3, D_1\right\rangle\left\langle 90^0, 3, D_2\right| + \left|90^0, 3, D_2\right\rangle\left\langle 0^0, 3, D_1\right| + \left|90^0, 3, D_2\right\rangle\left\langle 90^0, 3, D_2\right|\right). \tag{4.84}$$

注意，路径 1 和 2 全改成 3 了，但是 D_1 和 D_2 还得留着。要注意，这个时候你那个路径 3 能提出来，可是那个 D_1 和 D_2 是提不出来的，除非 $D_1 = D_2$ 也就是，你的探测器根本不能区分到底光子走了哪一条路径。我们假设探测器没有失灵。于是，

$$\rho_3 = \frac{1}{2}\left(\left|0^0, D_1\right\rangle\left\langle 0^0, D_1\right| + \left|0^0, D_1\right\rangle\left\langle 90^0, D_2\right| + \left|90^0, D_2\right\rangle\left\langle 0^0, D_1\right| + \left|90^0, D_2\right\rangle\left\langle 90^0, D_2\right|\right)|3\rangle\langle 3|. \tag{4.85}$$

现在，我们问，如果我们不管探测器到底哪一个探测到了光子，我们的状态该写成什么？这个问题需要计算一个部分迹，也就是对不关注的变量的所有可能求和，数学上就是

$$\rho^1 = Tr^{-1}\left(\rho^{12}\right) = Tr^2\left(\rho^{12}\right) = \sum_{s^2}\left\langle s^2\right|\rho^{12}\left|s^2\right\rangle. \tag{4.86}$$

在概率论里面，这个操作叫做求边缘分布，把某一个不关心的变量取和或者积分掉。例如，你的分布函数 $\rho(x, y)$ 有两个随机变量 x, y。如果你想把 y 的随机变量的性质忽略掉，只留下关于 x 的分布函数，则我们需要把 y 积分掉

$$\rho^1(x) = \int \rho^{12}(x, y)\, dy. \tag{4.87}$$

现在，在我们这里我们来做关于探测器 D_1, D_2 的部分迹，

$$\rho_4 =\sim_i \langle D_i|\rho_3|D_i\rangle, \tag{4.88}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left|0^0\right\rangle\left\langle 0^0\right| + \left|90^0\right\rangle\left\langle 90^0\right|\right)|3\rangle\langle 3|. \tag{4.89}$$

注意，神奇的事情发生了，你看这个状态，它只有两个对角项，而且你非常熟悉，正好就是硬币的向上状态加上硬币的向下状态。

那当你把这个状态再塞到 45^0 的偏振片里头，你再去求一下，你就发现你求出来的那两个通道，它出现粒子的可能性都是 $\frac{1}{2}$，

$$P_{45^0} = Tr\left(\hat{P}_{45^0}\rho_4\right) = \frac{1}{2}, P_{135^0} = Tr\left(\hat{P}_{135^0}\rho_4\right) = \frac{1}{2}. \tag{4.90}$$

那这件事情，就完全地解释了为什么加了一个探测器之后，我们的整个行为都变了，而我们所用的所有的数学，完全没有超越前面跟大家讲的这四个公式，就是状态是可以加起来的，加起来之后你再写下一个状态的密度矩阵的时候，你要把右矢和左矢配起来，这是第一条。

然后，由于量子它是一加起来，就是一和二状态是能加起来，0^0 和 90^0 是能加起来的并且就是 45^0 的状态。一旦把这样的状态的密度矩阵写出来，你就会出现左边看起来像 0^0 的右矢，右边看起来像 90^0 的左矢的这种交叉项，而在经典的系统里头没有这样的交叉项，这是第一个公式。

第二个就是如果你有了状态 ρ，又知道了测量算符 A 到底是什么的时候，你算它们的均值，就去算 $Tr(A\rho)$。

然后，第三个测量后的状态就是你把那个测量得到的记录放在左边和右边，中间夹着你的密度矩阵 ρ。咱们先暂时忽略这个演化算符的那个公式。

当然我们在讲，加上探测器的时候呢，还稍微地多用了一点点——部分迹。但是这个多用的一点，可以认为它其实是从经典的概率论里头借过来的，也就是说如果我们有两个随机变量，你对其中一个不感兴趣，你怎么办呢，你把那个随机变量的所有的可能的状态找出来，然后你把它的几率算出来，把它求和掉，也就是说当我只关心两个随机变量当中的 $\rho(x, y)$ 当中的 x 而不关心 y 的时候，我就做一个 dy 的积分。

在这里为止，除了允许量子的状态是可以加起来之外，没有引入任何新的东西，但是我们所有的提到过的实验，都完全可以解释，那除了我今天讲的这个光子 Which-way 实验，还有前面讲的 Stern-Gerlach 装置的多个磁场方向的实验，我完全地老老实实一步一步给你们算了之外，后面的我就不再算了。但是，你相信我，你只要沿着这四个公式去算，那么每一个的实验，你都可以去得到解释。

4.6 概念地图形式的总结

那下面这张图就是之前讲过的所有的内容的总结。它告诉你说经典的概率论是什么样子的，哪些实验现象是能解释的，哪些是不能的。然后，经典的牛顿力学是长什么样子的，基于什么样的原理的，哪些实验是能解释的，哪些实验是不能解释的，然后我们的量子的理论是长什么样子的，然后，哪些实验是能解释的，当然我们发现量子的理论，它由于包含了经典理论的这个特殊情况，它任何实验都是可以解释的。

我们把所有讲过的量子力学做一个总结，第一条就是量子现象要求我们的数学具有相干性，也就是说它有一个向上的状态，有一个向下的状态，但是上下加起来呢，这个状态是有意义的。比如说在光子里头呢，0^0 的状态加上 90^0 的状态呢，它是 45^0 方向的状态。而在自旋里头呢，z 方向的向上加上 z 方向的向下呢，它是 x 方向的向上态。那用猫来说呢，就是一个死的猫，加一个活的猫，它可能是个兔子。那这样的组合，它不是个概率性的加和，它不是说要么是死的猫，要么是活的猫，要么是 z 方向向上的状态，要么是 z 方向向下的状态。因为“要么⋯要么”，你写成数学表达式之后，它是只有这个对角的 P_1 和 P_2，以 P_1 的概率处在 1 态，以 P_2 的概率处在 2 态。而回到“矢量加和”而不是“要么⋯要么”的情况，当你写成一个密度矩阵的时候，它总会这里多出两项，这一项是指左边看起来像 1 态，右边看起来像 2 态，这个呢，左边看起来像 2 态，右边看起来像 1 态的项。

由于这样的数学和这个实验的要求，很多时候我们把下面几个概念做认同：叠加原理、相干性、非对角元、量子概率。当我们说这几样事情的时候，我们都是指它的状态是可以加起来的，写成密度矩阵之后，它会有非对角元的。然后我们经常用“状态满足可加性”这一点来代替上面说的所有的名词。

经过前面那个加了探测器的实验，我们还注意到一件什么事情呢，就是说这种可加性它其实是有条件的，条件就是你得原则上这两条路径就是不可区分的，你才能用量子的这个加法，你才能用 1 态“+”2 态，上态“+”下态的加法。否则你只能 1 态 2 态的概率组合，也就是 $P_1 |1\rangle\langle 1| + P_2 |2\rangle\langle 2|$。这一条是非常非常的关键的：状态本质上就不可区分的，用矢量加法；否则用概率加法。那剩下你就自然产生一个问题，那这个本质上不可区分，到底怎么判断呢？那我们给你的探测器就是其中一个例子。也就是说，这种所谓的本质上不可区分，意味着这样的探测器都不存在。

换过来说，就算你本身是一个量子系统，可是你非得在我的测量过程当中加上探测器，那么它就使得它的量子相干性消失了，它变成了一个具有经典叠加的东西，于是需要做概率叠加。

所以换句话说，这句话用另外一个方式来代替可能更好，就是什么时候你用到了经典的信息，那么它就变成了一个概率的叠加，而不是量子的叠加。可是只是换了个词，还会存在问题，那什么时候叫遇到经典的信息啊。这个问题的答案我不知道啊。那只好先把这个问题留在这儿。但是我们说了，原则上不可分辨的多个发生的可能性，我们用矢量加起来。而那些由于

信息不够，但是原则上可分辨的呢，我们要用概率相加。整个逻辑遗留下来的唯一问题是到底什么叫做原则上不可分辨。我们还说了有可能可以利用是否运用了经典信息来判断，但是以后我们再展开讨论这个问题。

4.7 量子态的演化，选读

为了下一步讨论更好地去理解两个自旋的纠缠，我们稍微地把量子演化这个东西提一下，我说了这不作为学习内容，但是不知道这件事情，后面那个纠缠到底怎么来，这个事情呢很难想明白。当然，我就算教了你演化的部分，反正你也想不明白。不过，至少你可以有理由相信我说“其实啊，纠缠状态是可以用某种方式做出来的”。

好，那这个演化算符，量子状态的演化是什么呢？它说有一个外界，这个外界呢，是指某个东西对我这个自旋发生了作用。比如说当我有两个自旋的时候，我可能另外一个自旋就是我的外界，而我观测的这个自旋是我的内部。这时候呢，它们两个自旋，我可以比如说，举个例子写下来，它的能量我们管它叫Hamiltonian（Hamiltonian），

$$H = J\sigma_z^1\sigma_z^2. \tag{4.91}$$

它表示如果我的状态第一个自旋是 z 方向向上，第二个自旋也是 z 方向向上，那么它拥有的能量就是正 J，那反过来，如果一个向上，一个向下，它拥有的能量就是 $-J$，两个都向下呢，拥有的能量也是正 J。所以，这样一个哈密顿量，它给出来了所有的可能情形下的能量：反正任何时刻我总是可以去问两个自旋的各自处于到底 z 方向上向上还是向下状态。

那演化算符是什么意思呢？就是从一个状态如何变成另一个状态。给定外界也就是给定 H，对于一个初始状态 $\rho(0)$, t 时刻以后的状态成为[2]

$$\rho(t) = e^{-iHt}\rho(0)\, e^{iHt}. \tag{4.92}$$

我们找出来算符 H 的本征态，也就是满足

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \tag{4.93}$$

这样的状态 $|n\rangle$。我们有

$$e^{iHt} = \sum_n e^{-iE_nt}|n\rangle\langle n|. \tag{4.94}$$

[2]其实，这里还有一个常数 $\hbar$，也就是 $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$，我们忽略这个尝试 $\hbar$。

于是

$$\rho(t)=\sum_{mn}e^{-iE_nt}|n\rangle\langle n|\rho(0)|m\rangle\langle m|e^{iE_mt}. \tag{4.95}$$

这个演化算符的具体形式我们就不深入学习了。从这里，我们只需要意识到一点：通过这个演化算符，系统的状态会发生变化，怎么变由 H 决定。

有了这一条，我们说，只要我们选择合适的 H，我们总是可以使得一开始两个自旋独立的状态，变成两个自旋关联起来的状态。具体如何实现的例子，可以参考的《二态系统的量子力学》[?]。

经典概率论里面，所谓两个子系统独立的状态是指 $P(AB)$ 满足如下等式，

$$P(AB)=P(A)P(B), \tag{4.96}$$

或者说，

$$P^{AB}(\alpha,\beta)=P^A(\alpha)P^B(\beta). \tag{4.97}$$

用 Dirac 符号来重写一下，就是

$$\begin{aligned}\rho^{AB}&=\rho^A\otimes\rho^B, &(4.98)\\ &=\left(\sum_\alpha P^A(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|\right)\left(\sum_\beta P^B(\beta)|\beta\rangle\langle\beta|\right), &(4.99)\\ &=\sum_{\alpha,\beta}P^A(\alpha)P^B(\beta)|\alpha\beta\rangle\langle\alpha\beta|, &(4.100)\end{aligned}$$

而两变量经典状态的更加一般的概率分布可以是，

$$\rho^{AB}=\sum_{\alpha,\beta}P^{AB}(\alpha,\beta)|\alpha\beta\rangle\langle\alpha\beta|. \tag{4.101}$$

其中这里的 $P^{AB}(\alpha,\beta)$ 可以是更一般的不满足公式 (4.97) 的形式。满足公式 (4.97) 这个要求从而可以写成的 $\rho^{AB}=\rho^A\otimes\rho^B$ 的状态就叫做直积态。不能写成直积态的经典状态就叫做关联态。

相应地，量子状态也存在直积态和关联态，并且还有一种更加特殊的关联态，也就是我们在下一章要讨论的量子纠缠态。

量子系统的演化这一章，除了让大家看一眼量化算符长什么样之外，最重要的目的就是了解到（不一定相信，想进一步确认，可以去参的《二态系统的量子力学》[?] 照做计算和检验）有了演化算符，经典系统可以从直接

态或者说独立概率分布变成关联态，量子系统可以从直积态变成关联态（以及将来的特殊关联态——纠缠态）。

顺便，当你学习任何具体知识的时候，一定要想办法理解到学习这部分具体知识的目的，这样学习才会更有动力，也能把逻辑整理的更清楚从而把这部分知识本身也学得更好。

4.8 本章小结

有了这个演化算符之后，我们把所有的量子力学完整的数学描述再总结一次。

1. 状态：状态之间有加法，导致其状态的数学模型是线性空间矢量的密度矩阵 ρ，
2. 物理量：线性空间上的厄米算符（满足 $A^{\dagger}=A$）A，
3. 测量的形式理论：对某一状态测量某一物理量遵循 $\langle A\rangle_{\rho}=tr\,(A\rho)$，
4. 测量后状态：记录到哪一个可能状态（$|m\rangle\langle m|$），则系统在测量之后就处于相应的本征态 $\rho_{afm}\sim|m\rangle\langle m|\rho_{bfm}|m\rangle\langle m|$，
5. 系统的演化服从 Schrödinger 方程，$\rho_f=e^{-iHt}\rho_i e^{-iHt}$。

这一套理论，物理学家们已经做实验，验证了第三、四、五这三条中的三个方程的正确性。前面提到的所有的实验，以及更多咱们没有学习到的实验，都可以由这五条来解释。并且，更近一步，这五条在经典状态上也同样适用。

这很好地展示了科学的创造出来的结果也就是理论和创造这个理论的过程的美：经过人类艰苦卓绝的努力，丰富多彩千变万化的量子和经典世界，通过这样五条就可以看透。所谓科学普及，就是科学家帮你来体会这个结果和过程的美。

我们再来看这五条。量子力学首先使用第一、二两条来解决了量子系统用什么数学结构来描述的问题：用矢量空间上的密度矩阵和厄米算符；接着，对于测量结果、测量后状态、演化三个问题，分别给出来了一个方程。

这就是数学建模，首先找到描述这个系统的数学结构，接着，在这个系统结构上来回答这个系统的可检测的研究者或者实践中关注的问题。把对一个系统的描述分成基本数学结构和这个数学结构之上要回答的问题，是一个非常强有力的描述世界的方式。

顺便，除了知识上的总结，我们稍微多说一点关于科学的发展的事情。这里的三、四两条的验证比较简单，测量就行了。那么，第五条演化的方程是怎么验证的呢？在物理学当中，大家是怎么知道这个演化算符的方程的呢？其实这是猜出来的，然后你只能说我将来去验证一下它到底对不对，那验证的时候怎么办呢？

思路非常简单，你说对于我给好的一个环境，我相当于给好了一个哈密顿量 H，然后我就把这个演化算符算出来，算出来之后呢，按照理论上我预期比如说 $t = 1$ 秒之后，它可能是这么个状态。那么对于这么个状态，如果你去测量一个物理量 A 呢，你会得到什么样的测量结果。这些都是我按照这三个核心公式算出来的。然后我拿着这个算出来的结果，去做实验，我做出来实验发现非常接近我算出来的结果。那好了，这就表示我的演化算符也是对的。

所以，这些核心公式其实都是猜出来的。当然，如果你去回顾物理学的发展的历史，它也不是完全瞎猜的。在物理学提出用矩阵的方式，用算符和向量的方式来描述状态之前，其实数学家已经提出了这套叫做非对易数学的这样一套数学语言，$AB \neq BA$ 的这样一套数学。至于数学家怎么就想起来的，那是另外一件事情。但是，有了这一套语言的实际对象，从物理学中提出的问题，反过来也就促进了这套语言本身的发展。例如，量子力学推动了算符的谱理论和泛函分析的发展。因此，我们看到，数学和物理学的发展是相互启发的。

我们再进一步，从这个学习过程来看一下更加一般的学习。从知识上，我们首先学习了一点点量子系统的行为，发现经典粒子和波的理论都解释不了这些行为。接着，准备了一些数学，知道了概率论的 Dirac 符号和算符或者说矩阵运算。然后，我们系统性地学习了量子系统的行为，发现了更多经典理论不能解释的行为。最后，我们用这五条来解释了量子系统的行为。

确实，这个知识的学习过程是或者至少我希望是“痛并且快乐”的。但是，这个痛完了如果仅仅学到了知识是不够的。于是，在这一小节（以及全书的其他我可以把这些感想放进去的小节）我们以这些知识的学习和创造的过程为基础，帮助大家一起来看看科学的美，来看看数学建模在科学中的地位和作用，来看看科学和实验、科学和数学的关系。这个从具体知识到什么是科学的提炼过程，正好体现了理解型学习（关于理解型学习的更多资料，可以参考吴金闪的《教的更少，学得更多》[?]）：从具体知识到学科大图景，从科学研究的过程来体验什么是科学。

其实，更更进一步，从对知识的学习过程中体验什么是理解型学习，本身，也是理解型学习的例子。

学习和创造，本来就应该是这样一个不断提高提升和总结，然后又不断地把提升和总结出来的对学科的认识、研究方法、学习和思考的方法又用于具体知识的学习和具体系统的研究的过程。

第五章 拓展：纠缠和测量

现在我们有了描述量子系统行为的数学语言，我们来把这些语言用来讨论更加复杂一点的主题，量子纠缠、量子计算和量子测量。

5.1 双自旋系统关联态

有了量子力学的基本的理论框架，又有了实验上的驱动，那我们现在来看一下一个叫做量子纠缠的东西。那为了讲这个量子纠缠呢，我们先来铺垫一下，叫做两自旋系统，两自旋系统它的状态会是什么样子的。那如果是两个硬币，它的状态会是什么呢，它的状态就是第一个硬币向上，第二个向下。第一个硬币向上，第二个硬币向上，所以它就是四个，就是上上下下、上下下上这样四个状态。它不可能有任何别的状态，然后写成我们刚才矩阵的语言就是 P11、P10、P01、P00，00 就表示两个都向下，10 就表示一个向上，（口误）（00:36:25）11 就表示两个都向上。也就是说你就写成一个四维的矩阵，而这个矩阵只有对角的这四个元素。那同样的道理，当我们把这个问题变成两个自旋的时候，我们说了它基本的状态还是这四个，因为它反正独立的状态，在一个自旋里头，它只有两个，就是向上和向下，不管是 Z 方向，还是 X 方向，它只能取一组基矢。好，所以它也是一个 4×4 的矩阵，如果是两个自旋的话，因为每个自旋都是个二维的东西。36：57 但是呢，它可以，因为任何一个自旋都可以占满一个 2×2 的矩阵，所以两个自旋的时候呢，比如说假设两个自旋是独立的，这时候就是一个 2×2 的矩阵，乘上另外一个 2×2 的矩阵，这个乘法就是前面所说的概率事件里头的加法（口误）00:37:20，概率事件里的乘法，独立事件的乘法，就是如果第一个硬币，比如说它是 1/3 的向上，2/3 的向下。第二个硬币跟第一个硬币独立，它呢是 1/2 的向上，1/2 的向下，你猜最后 P1、P2 那些东西它是什么，你如果稍微在脑子里做一下计算，你就知道第一项应该等于，我刚才说的可能是错

的啊，1/3 乘上 1/2，假设没算错的话就是这个。37：51 然后第二项呢，是 P10 应该是等于 1/3 乘上 1/2，然后 P01 呢，是 2/3 乘上 1/2，P00 呢，就应该是 2/3 乘上 1/2，也就是说你实际上算的就是每一个事件出现的概率，组合事件出现的概率等于各自事件出现的概率的乘积，这个就是独立事件的概率的乘法。好，那么有了这个之后，你就类似地说，我如果是个 2×2 的矩阵，因为一个自旋是 2×2 的矩阵，我下面还有另外一个自旋，它也是个 2×2 的矩阵，我怎么把它们俩乘起来呢，在数学上的操作叫做直积，但是你不用管，大概就是它会得到一个 4×4 的东西。稍微说一下，就是每次算的时候，相当于把底下的东西藏到上一个矩阵的每一个元素里头去，所以它每一个点会变成一个 2×2 的矩阵，那既然原来是 2×2 的，有四个地方，每个地方都变成 2×2，它就是一个 4×4 的矩阵。38：49 好了，也就是说整个两个自旋的最复杂的状态，不过就是一个 4×4 的矩阵，可是它已经不是对角的了，只有经典的，它仍然是对角的，量子是一个丰满的 4×4 的矩阵。好，我们也说了独立状态，那下面我们来说一个经典的关联态。那经典的关联态是什么样子的呢？就是第一个硬币，它向上的时候，第二个硬币也向上。第一个硬币它向下的时候，第二个硬币也向下。当然，你也可以反过来，就是第一个向上的时候，第二个就向下。第一个向下的时候，第二个就向上，我们暂时不去管这个反过来的情形，我们管它们俩一致的情形。好，这个时候我们来试着写一写 4×4 的经典的密度矩阵长什么样。就是第一个向上的时候，第二个也向上，第一个向下的时候，第二个也向下。然后第一个硬币向上的自身的概率，比如为了简单起见，我们还写 1/2。所以，这时候你会发现它的状态如果你写成抽象矢量符号呢，它等于 1/2 的 11 右矢，11 左矢。加上 1/2 的 00 右矢、00 左矢。好，你通过这个写法，你也可以看见，你这个矩阵将来就是，这个地方有一个 1/2，中间两个是 0，然后后面还有一个 1/2。因为中间那两个是刚好一个向上，一个向下的状态。而我们刚才举的例子呢，是两个保持同步的同样状态的例子。所以，中间两个是 0，这个地方有一个 1/2，这个地方有一个 1/2。40：22 好，你设想一下，如果我拿着这么一组硬币，我来干下面这件事情，我呢，打开其中一个看了一眼，我发现它向上，你能说一件什么样的事情。我说百分之百第二个它也向上，废话，我的状态本来就是这么设计的，第一个状态永远和第二个状态一样，只是说每一个硬币自己来看呢，它既可能向上，也可能向下，对吧。因为我们既然允许经典的纯随机硬币的存在，我们就可以造出这样的东西来，比如说我们有两个不同的地点，这两个不同的地点特别好玩，它们这个时钟呢，每

一个都是不一定准的，可是这两个时钟每个都是同步的，也就是说我显示几点，你也显示几点，尽管你不准，但是我只要看一个钟，我就可以知道另外一个钟是几点，那就是这么个情况，这个特别好理解。也就是说我们经典关联态就存在的这样一个现象，这个现象是我只要看其中的一个，我就可以知道其中的另外一个。然后你问自己说，这样的信息需不需要时间来传播，肯定不需要啊，我这里完全没有任何时间的故事啊，我只要打开一个看，我就知道另外一个也跟它一样。所以，它不需要任何物理现象的发生，不需要任何时间，它是一个数学上的关联，我只要知道其中的一个，我必然可以推断出其中的另外一个，这叫关联态。那剩下的纠缠态是什么呢，这个稍微复杂一点，然后我们来举一个纠缠态的例子。42：20 我刚才说的经典关联态，所有的逻辑推断做出来的结论都是可以用前面教你的这套数学把它算出来的，那从公式 71 开始，后面的 72、73，它就告诉你它是怎么算出来的。它说如果说你的经典状态是这么一个状态的话，这里的加加就表示两个都向上，减减就表示两个都向下。那么你去测其中的一个，你会看见什么，这时候你看另外一个会看见什么，那另外一个怎么看出来呢，你测完其中一个以后，你去做一个测量后状态的计算，也就是说你把测量状态这个算符 MM 右矢、左矢写在左边，写在右边，中间把　当一个三明治夹在中间，你只要去这么算一下你就发现，你的另外一个硬币也只能是向上态，如果你观测到自己是个向上态的话。好，那所有的我刚才说的话都是数学上可以算的。

5.2　量子纠缠态

43：31 那么现在我们来看量子自旋，量子自旋我们说了，跟经典的硬币不同的呢，它就是可以用矢量加法，所以我们构造出来的状态，不是那个加加右矢、加加左矢 1/2，加上 1/2 的减减右矢、减减左矢这个东西了。而是加加直接加上减减的右矢，配上它的左矢，所以你展开它还是四项，（不确定）(00:43:57) 那四项其中这两个不匹配的项呢，就是非对角元，我们说只有量子的状态才是可以存在的，如果是经典的系统呢，那两个非对角元的项是不能存在的。好，我们来看这样的一个状态，如果我们对它做测量，我们会发生什么事情。那公式 75 就是这样一个状态，然后我们接着去对它做一下测量。不对，74，公式 74 就是这样一个状态，那下面我们对它做一个测量。44：42 在对它做测量之前呢，我们给它做一个坐标变换，我们把这个加加、减减的状态，它相当于是 Z 方向的向上和向下态，把它变到 X 方向里

头去，这个变的过程就是 X 方向向上态等于 Z 方向的向上态，加上 Z 方向的向下态，你把这个东西带进去，那反解出来，你会发现 Z 方向的向上态，也等于 X 方向向上加上 X 方向向下，Z 方向的向下态，它等于 X 方向的向上减去 X 方向的向下，对，就是这么一个状态，是不是我中间忘了一个 I，我不太清楚，如果忘了一个 I，反正你自己去算一下。好，那么带进去之后，你就会验证一条，如果你不去验证，就相信我。验证完了什么呢，你就会发现在 X 的坐标下，把 X 的向上向下当基矢的情况下，你发现写下来的那个密度矩阵，就是刚才那个加加加上减减的右矢、左矢，这个东西它竟然是不变的，只不过变成了 X 方向的上上加上向下的右矢配上它的左矢，这是一个非常神奇的现象。也就是说我选的这个状态，非常非常的好，第一它是一个经典关联态。第二，我不仅在 Z 方向上是经典关联态，我做了变换以后，X 方向上它仍然是一个经典关联态，那更一般的就不做要求了，但是你相信我，如果你去做一个 Y 方向的状态，做一个任意方向的状态，当成基矢的话，它都是这么一组关联态。这个关联态非常非常的强大，是任何时候，这两个自旋的状态永远关联在一起，这是第一。46：34 第二，它在任何一套坐标系下去看，它看出来的那个都是完全关联态，也就是说取任意方向的向上和向下当成基矢，它永远是 up up 加上 down down 的右矢，然后配上它的左矢，这是非常非常神奇的事情，这也是只有量子力学满足矢量叠加性，才能做坐标变换，才能干得事情，但是这是我专门挑出来的，其实不是我，是历史上的科学家专门挑出来的这组态，这组态就是满足在给定坐标系下上上和下下是完全相关的，在任何一个坐标系下这个条件仍然是成立的，所以这是非常了不起的一组状态。那当然你已经可以猜到这组状态之所以叫纠缠态，就是这个原因，就是说它是像经典一样的关联态，但是它是超越经典的关联态，因为它在任何一组坐标下，它都满足经典关联态的性质，所以叫纠缠态。而经典关联态本身呢，是不能做坐标变换的，也就是说一态就是一态，零态就是零态，向上态就是向上态，向下态就是向下态，一个硬币它不可能出现一个向上加向下的状态。47：40 好，那有了这个坐标变换的知识储备之后，我们来做一下这个东西的测量。这个满足经典变换的结果就是公式 77 所写的，那么这时候我们就发现，如果我们选了 Z 方向去测量第一个自旋，然后我们看第二个自旋是什么状态。因为我们前面说了，这个时候看起来就跟经典的一模一样，对吧。当然你也可以重复独立的计算，用前面的几套公式，就是你先写下算符来，然后算符就跟 乘在一起去算均值。然后接着算完均值以后，你得到均值就推测出来它到底什么状态，然后呢，你去把

这个状态当成一次测量的记录，去算那个测量后状态，你可以去重复这个计算的过程，然后你也会得到下面我要说的结论，你也可以按照经典的去猜，因为你说它反正看起来在特定的方向上，它就是个经典关联态。那么这时候你得到的结论就是在任意方向上做测量，你看见第一个自旋是什么状态，第二个自旋就是什么状态，这是非常神奇的一个属性。49：09 那么刚才所说的这个奇怪，神奇的这个状态到底是怎么来的呢，第一个来的方法就是你设计一个合适的两自旋的相互作用的哈密顿量 (00:49:22)，就是让它们的能量取合适的值，然后在某个特定的时间点，这个时间点下就会形成这样的经典关联态。第二个方法呢，你去做测量，把那些不关联在一起的东西扔掉，只让关联在一起的东西进入后面的进一步实验，也就是说如果我观测到它们俩是一样的，我就把它们俩做下一步的测量，那这个是测量导致的纠缠，如果你有兴趣就看一下《二态系统量子力学》或者是当年一开始提出来纠缠态的相关的文章，参考文献都可以从《二态系统量子力学》这本书里头找到。有了任意方向上看起来都像经典关联态的这么一个态，它叫量子纠缠态，之后我们来看量子态的远程传输是什么，第 44 集：量子态的远程传输在量子信息和量子计算里头，量子态的远程传输都是一个非常重要的事情。那为了实现它呢，我们需要三个自旋，三个自旋当中的一个呢，是被传输的对象，所谓远程传输，就这么一个意思。我一开始，比如说这个状态呢，是放在一个 O 的自旋上，它的状态我不知道，然后呢，我想把它传给一个遥远的地方，在我不知道它的条件下，那如果比如说你考虑一个经典的怎么办呢，经典的你说你可以这么办，这个硬币它反正是要么向上，要么向下，更加复杂的就是 P1 的概率向上，P2 的概率向下。我想办法知道 P1 和 P2，那怎么知道呢，我测无穷多次就能知道 P1 和 P2。知道之后，我就打个电话告诉它，我说这个是 P1 等于 1/2 做出来的，那么他只要做出一个 P1 等于 1/2 的经典硬币也就完了。那这种呢，它就跟我这个远程传输的概念不是一个，这种是我测很多很多次以后，完全知道了信息，然后把它呢传到那边去。51：32 那还有一个办法是什么呢，还有一个办法，你说经典的时候，我也可以这样。你看它不是允许一对经典纠缠在一起的，经典关联在一起的一对自旋吗，我说你想传它怎么办呢，我是不是可以一定程度上把它的状态转到，这一对纠缠在一起的，就关联在一起的自旋上，我想办法把这个 O 的状态呢，传到这个 A 上，A 和 B 是那俩完全一模一样的自旋，硬币，就是它向上，它也向上，加上它向下，它也向下的那组。好，那么我是不是一定程度上通过这个把它看在一起呢，我就把我的状态一定程度上能传给它呢，这个呢是另外

一个思路。什么思路呢，比如说我如果有办法，如果有办法实现这个，就是我只要用某个东西照一下，它们俩就会变成一模一样。尽管照完了我不看，对吧，我只要照一下，那这个时候，我就能把这个，假设我就能把它们俩的状态做某种奇怪的操作，把我的状态传到它身上，由于这两个状态本来就是一样的，所以我就可以断定它的状态就是我这个的状态，当然你真要做这件事情，这个很难，但是思想就这么简单。也就是说如果你有一对，这一对是事先就是编码了，它们本来就是一模一样的，那么这个时候很有可能你可以做一件神奇的事情，在未知它的状态的情况下，把它的状态就传给了第三个自旋。这个叫 O，这个叫 A，这个叫 B，Alice Bob 和 Object，也就是你可以把 O 这个东西传到 Bob 的身上，但是而不去做关于 O 的多次测量。那这就是一个远程传输的概念，也就是说我不是通过完全知道 O 以后，让这个 B 去把它重新做出来的，我是通过一对已经纠缠在一起的自旋，使得我这个 B 的状态就变成 O 的状态，而我不需要知道这个 O 的状态是什么。53：38 由于我说了不管是经典和量子的时候，它们都是纯数学的事件，对吧。就说我不需要一个时间过程来从观测一个自旋或者一个硬币来推测另外一个自旋或硬币的状态，我马上就能知道，它肯定是另外一个。所以呢，这个远程传输还具有非常好的性质，这个性质就是它是非物理的过程，它是瞬间传输的。好，所以我如果能实现的话，这是一件非常非常了不起的事情。因为它是瞬间的，所以距离对我来说根本不是概念，我完全只有数学上的这个概念，而不是物理上的概念，所以它可以跨越，无论多远，它都是瞬间传过去的。也就是说我把 Alice 和 Bob 做得特别神奇，我当它们俩一开始离得很近的时候纠缠在一起，我保证它们俩离得很远很远的时候仍然纠缠在一起，如果我技术上做得到的话，而我又能实现这个纠缠的状态的传输的话，那我就神了。因为我不管 Alice 和 Bob 离得多远，我把它们俩做一件事，这个状态不管离得多远就成了这个 O 的状态，所以这是一个非常非常重要的事情，它不需要时间，距离完全不是任何问题。54：52 好，那我们来看一看这件具体的事情到底是怎么做的。我们把 O 的状态写下来，那作为一个一般的量子态，O 的状态就是 的向上态加上 的向下态，这个就是公式 79 所说的内容。一对纠缠起来的量子就是公式 78 里头的状态，就是两个都向上，加上两个都向下这么个状态。好，那现在我们希望 B 的状态也变成 的向上态加上 的向下态这么一个状态，那我们来看一看怎么做。这件事情是怎么做的呢，第一件事情说，我们把这三个东西的状态先当成一个整体，所以写下来的状态叫 PS OAB（音）（00:56:05），你把 OAB 都写在一起。写在

一起呢，因为 O 呢，是和 AB 两个独立放在一起的，所以它就是一个乘积项，所以呢，它就是 PS O 乘上 PS AB 的状态（不确定）(00:56:18)。顺便，我这里为什么不用 写，只写它的右矢，不配上它的相应的左矢呢，是因为写了左矢以后，这个问题就更复杂了，但是计算的内容是一样的，所以我忽略另外一侧的左矢的符号，我只写下右矢的符号。56：32 好，那么有了这个之后呢，我来做一件数学上神奇的操作。我说了我想把这个 O 和 A 放在一起，把 B 放在远处，所以呢我对这个状态做一个自旋的描述的变化，这个变化是什么呢，我不再把 O 看成独立的了，我每次都希望把那个 B 甩的远远的，我把 O 和 A 呢，放在一起。所以呢，我做了一个公式 81 的变换，我把那个 O 和 A 的 00 态和 01 态、10 态、11 态，这四个态呢写在一起。那我把它们写在一起之后，就能得到这个公式 81 的样子，这纯粹就是为了使得 B 这个东西远远地甩开，我只看 O 和 A，所以这个我没有做任何物理上的事情，我只是数学上把这个状态呢，重新写一下，写成 O 和 A 放在一起，B 放在另外一侧的状态。57：38 那有了这个状态之后，你仔细地观察这个状态，你发现什么有趣的事情呢，第一个出现在这个状态中的那个 OA 的项是 00 加上 11。那第二项是 00 减去 11，第三项是 01 加上 10，第四项是 01 减去 10。这表示什么意思呢，这四个状态本身啊，如果你去算它们的内积，你发现它们是内积为 0 的，也就是说这四个东西本身就可以当成一组变量的基矢，那么这时候，神奇的事情就来了，你说我就做出来一个测量的算符，这个测量的算符呢，刚好把这四个状态当成我的测量算符的本征态，也就是说我这个测量算符测一次呢，每次只出现这四个状态当中的一个。好，我们说假设你测出来的是第一个，我们给了它一个名字叫（听不出来）(00：58：41)，假设你出现的是 Fire1（音）(00：58：50)，那么再按照我们前面教的量子力学的测量后公式去算，你发现你把 Fire1 那个写成左矢、右矢，这个写成左矢、右矢，把 写在中间，像一个三明治一样包，你就发现剩下来的那个东西就是 Psi of B (00:59:08)，它就等于那个第一项剩下写在后面的东西，那是什么呢，是 的 0 加上 的 1。于是这件事情告诉你什么呢，就说如果你对 O 和 A 做一个两个自旋的联合测量，测量完了之后，假设你观测到它们俩合起来正好处于大写 Fire1 (00:59:34) 态，你马上可以给 Bob 打一个电话，说 Bob 你的状态正好就是原来那个 O 的状态，尽管我不知道原来那个 O 的状态是什么，我只知道 O 和 A 合起来被我一测，测到了它们等于 00 加 11 态。59：49 那么同样的道理，如果你测出来的不是大写 Fire1，而是大写 Fire2，也就是 00 减去 11 态，你会发现这时

候 PS B 等于什么呢，PS B（01:00:03）等于 的 0 减去 的 1。于是你就给 Bob 打一个电话说，Bob 我测出来的是第二个状态。然后 Bob 就知道了什么呢，他说我尽管不知道 和 的值，这我都不知道，但是我就可以做一个办法，使得我的 1 减去 0 这个状态呢，我重新变成 1 加上 0 状态。那这件事情怎么变呢，就是你要找一个新的矩阵，这个矩阵作用在 乘上 0 加 乘上 1，写成矢量的形式，也就是上面是 ，下面是 。这个矩阵作用在 、 上面之后，它自然就会等于…说反了，你要找到这个矩阵，会使得你测量完了之后，PSB 做一个变换会回到原来的 PS O，那 PS B（01:01:12）是什么状态呢，就是 的 1 减去 的 0，那写成矢量的符号呢，就是负的 在上面，正的 在下面。好，也就是说你要把这样一个矢量，通过一个矩阵的乘法，变成什么呢，变成一个上面是 ，底下是 的东西。那这个东西非常容易，这个东西就是 1 -1，你可以去验算一下，你只要 1 -1 乘上这个东西，它刚好就是或者是这个地方的 1，或者是这个地方的-1，等会，我去把它算一下。（不清楚）（01:01:45）01：02：08 好，那就是你需要把一个矢量 - 变成 ，这个矩阵很容易验算，它就是 1、0、0、-1，因为它只把最后那个变成了一个负号，或者从负号重新变成正号，其他都是不变的。那同样的道理，如果我测到的是大写 Fire3 的状态，你可以去看，这时候在不知道 值的情况下，PS of B 成了什么，而你接着要去看怎么把这个状态又通过乘以一个矩阵，重新变成 这么一个矢量的状态。也就是说我对于给定的任何一个测量的结果，只要 Alice 打个电话告诉我，他测出来的是哪一个，我就有一套仪器，这个仪器就对应着我找到了那个演化算符，就是那个作用的算符。那么这套仪器就能使得我完全不知道 PS B 是一个什么状态的时候，把它重新变回原来 PS O 的状态，这就是远程传输。01：03：23 这件事情，其实如果你只在某个方向上干，比如你用的是经典关联态的话，那么你第一点是能实现的。可是你后面的实现不了，也就是说在这里头有两点是重要的，第一是确实它在任何一个方向上都是完全关联态，第一点应该说它在某个方向上是完全经典关联态。第二点是说在任何一个方向上，其实它都是因为你可以做坐标变换，所以这两点，第一经典关联性，第二做任何一个方向的矢量当成基矢的坐标变换，仍然保持这个经典关联性，这两点使得你能去做这个远程传输。而后面这一点正好就是量子力学的叠加原理导致的，所以整个为什么能够去做量子远程传输呢，最根本的原因就是因为你能做坐标变换，能有叠加原理。那当然，只有一个自旋的时候，你是干不成的，所以神奇的是大家发现这件通过两个自旋就能干，所以当年把这个东西想出来，

也是一件特别了不起的事情。但是我们现在看到，你只需要把这个量子纠缠态先准备好，准备好之后呢，你再换一个角度去测量，你去测量 O 和 A 联合起来是什么，而不是去测量 O 是什么，因为我们说了，如果你要测量 O 是什么呢，你必须测量到这个程度，把 、 的值都算出来，你才能打电话告诉 Bob，Bob 才能重新把它做出来。但是，按照我们这种方法，你根本就用不着测量很多次，你只要测完这一次以后，告诉 Bob 说我得到的答案是 1，Bob 就说我什么也不用干。我得到的答案是 2，Bob 就说你准备这么一个仪器，套在这个状态上，它就自然会回到原来的状态。好，这就是量子远程传输。所以，无论你想传输什么，有一个信号总是要经典地传过去的，就是你得打电话告诉他，我的测量结果是几。

5.3 量子计算

01：05：53 除了量子远程传输，量子态的远程传输之外，还有很多其他的量子信息和量子计算的事情，也是运用了纠缠态的，因为纠缠态是经典所不能实现的，换句话说它其实也是用了非对角元，因为我们说了能够加起来，就会导致非对角元，而非对角元才使得纠缠，才是使得坐标变换能够实现的。那任何一个真正的量子算法或者完全区别于经典，经典显示不了的现象呢，原则上都是通过这个非对角元来实现的，或者说坐标变换来实现的，或者说矢量相加来实现。那你可以去看，比如说类似于量子的因子分解，那它可以在经典的情况下，你可能是用宇宙长的时间才能去分解一个大数，才能写下一个大数的所有的因子。但是，在量子的计算机上有一个算法，这个算法叫 Shor 算法，你会发现它是可以把，它用非常短的时间，把所有的因子都找出来的，那它本质上也是运用了这种状态叠加原理，或者说你也可以说运用了纠缠态之类的。01：07：10 那更多的关于其他的量子信息和量子计算如何运用纠缠态，如何运用非对角元，你可以去看比如说 Nielsen 和 Chuang 的量子信息和量子计算，或者如果你想初步的了解一下的话，那《二态系统量子力学》里也有很少的几个例子。

5.4 测量的含义：经典情况

好，那在知道了什么是量子力学，也知道它有什么用之后，我们来解决量子力学的最后一部分问题，就是它到底有什么问题，到底什么地方是我们

难以理解的，为什么迄今为止还有这么多人企图去构造一个没有态叠加原理的数学理论来解释量子的现象，这个态叠加原理到底什么地方使得我们接受不了。我们说了只要允许它所有的实验都能够解释，这一点没有人会否认，因为我们每一个都是算出来的，而且跟实验对比都是对的。但是，总有一些人他们觉得这还是因为这项经典概率论它不是完全必要的一样，概率论是由于信息不足，我们才需要写成概率论。类似的，他们认为量子版本的概率论包含了非对角元的概率论呢，其实也是由于某种意义上的信息不足或者其他的原因导致的，本质上我们可以写下一个理论，我们就不包含这种东西的。01：08：46 那我们来看一看这个根本问题在哪，如果我们真的想这么写的话，问题在哪。我们先来说量子测量这个过程呢，可以体现我们刚才所说的所有的那个难以理解的地方，那量子测量它需要什么呢，我们说它第一步需要先建立纠缠，也就是说如果我们去测量一个纯粹确定性的东西，这个事情很好办。在经典的时候，你看见一个车停在那儿，一看这个车原来就在那儿，这是完全确定的东西，那这个事情非常好办，也就是说你只要是有一个指针，这个指针呢，看见车的时候就显示为 1，看不见的时候就显示为 0。然后这个指针布满所有地球上的地方，它只要一响你就知道哪个地方停了一个车，你就这么测的。于是你呢，用我们刚才说的话，可以认为是建立起了地球上任意一点的或者某个点的指针和那个汽车停在哪个地方，那两个量之间的关联。但是，因为它反正是确定性的，你不用关联这套语言说也可以，你说反正就是车停哪，就哪个地方的指针亮。01：10：05 但是，如果我的这个车是一个随机的乒乓球，我不知道它停在哪的，它是真随机的，在我看那个乒乓球之前，我不知道那个乒乓球是正面还是，硬币是正面还是反面的，乒乓球不知道是 A 点，还是 B 点的，假设真的是这么一个硬币或者这么一个乒乓球，纯随机的，我们来说如果你要观测它，你需要什么，我们说第一，你需要建立它的状态和你的指针变量之间的纠缠或者说在经典的时候，那个纠缠呢，它蜕化成叫做关联。什么意思呢，就是你想吧，如果我的硬币的状态是 1/3 吧，为了避免这个 1/2, 那就 1/3 的 11 加上 2/3 的 00，就是 1/3 的可能它在 1 的状态，2/3 的可能它在 0 的状态。然后呢，你有一个指针去测量它，你希望它测量完了得什么呢，你想 1 的时候你也显示为一个大大的 1，0 的时候你也显示为一个大大的 0。那为了这个大大的 1 的区别，我们管它叫 up，那个大大的 0，我们管它叫 down，也就是说我们其实呢，希望得到什么呢，它的末状态是 1/3 1up 的右矢，然后 1up 的左矢，加上 2/3 0down 右矢，然后 0down 左矢。也就是说，我合起来的效果相当

于有 1/3 的时候呢，我看见我的指针就是向上，而它的状态对应着硬币或者乒乓球正好就是 1 的状态。有 2/3 的可能呢，我看见我的这个指针就向下，而它对应的状态也正好就是 0 的状态，这是我想要的东西。你想想你想要的状态不正好就是一个经典关联态嘛，所以你的经典测量是需要经典关联态的。只要允许随机，完全随机硬币的存在，你其实是需要先建立一个关联的。01：12：06 那这个关联是怎么建立的呢，在你的脑子里，就算你拿眼睛看也是建立一个关联的。怎么看呢，就是你只要看见硬币向上的时候，你脑子里肯定有一个叫对应着硬币向上的状态，你说，哦，向上向上，其实你脑子里就是那个指针。然后，看见向下的，你就会说，哦，向下向下，当我把你脑子里的状态和那个硬币的状态写在一起的时候，就是这个关联态。当然，通常的时候，我说过了，你为什么不这么看呢，是因为你认为硬币在你看之前，它就不是一个随机态，它本来就是确定了的。所以呢，你每次写下来的只有 1up 的右矢、左矢，或者 0down 的右矢、左矢，而没有这个 1/3 和 2/3 那个组合项，因为在你的通常的世界当中，你认为纯随机的世界是不存在的，在你看之前，这个世界已经是一个确定性了的世界。所以，我们只要退一步，允许纯随机的东西的存在，那么在经典的时候，你也是需要关联态的。那么有了这个关联态之后，下一步什么叫做真的看到一个测量结果呢，我们说你就做个部分迹，就是做一个部分取和，把那个随机变量，关于那个硬币的随机变量给它取和掉。那取和掉之后，你会得到什么呢，你去算一下你就发现，你得到的东西就是 1/3 的 up、up 右矢、左矢，加上 2/3 的 down、down 右矢、左矢。也就是说你现在脑子里的状态可能的是什么呢，1/3 的可能性你看到了它向上，2/3 的可能性你看到了它向下。而这个东西按照随机概率叠起来，正好就是 1/3 的 up、up 加上 2/3 的 down、down。好，也就是说在经典的时候，我们所谓的测量，一旦我们允许纯随机经典个体的存在，我们需要做两步，一步叫建立起经典关联，第二步叫做部分迹，就是求掉那个我们不想要的那个，不想留着的那个随机变量，只留下我们关心的那个随机变量的取值。01：14：06 然后第三步是什么呢，我们按照经典测量的解释，一旦得到了一个概率分布函数，我们是怎么解释的，我们说我们是从它各个可能当中随机抽出一个来当成它最后的可能性，最后的状态，并且出现这样状态的概率呢，正好就是由前面那个数代表的，所以 1/3 的 up 、up，加上 2/3 的 down，它表示什么含义呢，表示一旦你做实验的话，正好就是这个含义，它以 1/3 的概率出现向上，以 2/3 的概率出现向下。好，这个非常简单的经典的测量的现象，如果完全严格地用数学语言来

解释，并且允许纯随机经典对象的存在，那么它就要经过这样三步。第一步是建立经典关联，第二步是求部分迹，或者对那个不相关的，不想要的随机变量做取和。第三步得到的那个分布函数，取其中的任何一个可能，来当成最后的状态，并且这个可能出现的几率正好就是前面那个数所代表的值。

5.5 测量的含义：量子情形

01：15：22 接着我们把这三步用在量子测量的理解上，然后我们就会发现一件非常非常神奇的事情。我们说第一步建立关联，建立关联这件事情很简单，比如说原来我们有一个量子态，它是 的 1 加上 的-1，那么你一旦建立起量子纠缠之后，它就会成为一个什么态呢，就是 的 1up 加上 的-1down，然后右矢、左矢给它配上，注意你乘起来，这时候还会有四项，因为每个取和都是两项，左矢、右矢配上是四项。好，有了这四项之后，我们下一步事情是求部分迹，对吧，是跟经典的一样，先建立关联，再求部分迹，第三再选择其中的一个来当成最后的实验结果。好，我们第二步来做部分迹，如果这时候你做一个部分迹，你说我要把那个 1 和-1 的那两个状态，给它取和掉，1 和-1 跟我没关系，我只想看你大脑里头留下来的那个指针变量是什么。你一做你就发现，你把那个 1 乘在左边，加上那个 ，加上-1 乘上左边、右边，加上这个 1/3，加上那个 ，反正所有的部分迹都是这么做的，所有的迹也是这么做的。好，你会发现算出来的东西得到是什么呢，得到的是 的平方 up up，加上 的平方 down down。这个你很容易就能验算，但是这时候你要拿眼睛看着这个态。01：16：55 你看着这个态发现一件什么事情，你发现它只剩两项，原来那个一开始的量子态是四项，它是 的 1 加上 的-1 右矢以及它相应的配上的 的 1 加上 的-1 左矢，这个东西乘出来有四项，这四项分别是 的平方 11， 的平方-1-1，这两项将来也有，但是那个 乘上 1-1 和 乘上 -11 那两个状态消失了。而这件事情，在我前面所做的那个经典的第二步的时候，是不会消失的，也就是说因为经典它本来只有两项，我做完部分迹之后还是两项。所以呢，经典的测量可以看成什么呢，可以看成做了一个克隆，也就是说经典的时候啊，我是把一个随机变量强行地转移在我那个指针随机变量身上，它们俩是一模一样的。对象随机变量是 P1 的 11 加上 P2 的-1-1。那么我呢，这个指针变量的随机变量的状态，它是 P1 的 up up，加上 P2 的 down down，我只要把这个 up 和这个 1 等同，这个 down 和这个-1 等同，我相当于完全就是一个克隆，一份

拷贝。但是，在量子的时候，我完全照着一模一样的数学，可是我发生了什么事情呢，我算出来得到的那个末状态，那个做完部分迹以后的末状态呢，我从四项的原始态，变成了只有两项。那这个就是非常重要的在量子信息里头一个叫做不可克隆定理，或者叫不可传播定理，就说一个未知的量子态，你是不可能做出来另外一个量子态，跟它一模一样，同时那个量子态还没有被破坏掉，就还存在。那这件事情是不可能的，我们已经看到了本来是四项的东西，只要你先建立纠缠，再做个部分迹，它就变成两项的，那这个就是人类理解不了量子力学的地方。01：19：15 说我们通常认为什么是我们的测量呢，测量就是我们把这个世界是什么样，给它在脑子里头做一个心智模型，它还是什么样，这个叫测量，也就是说测量天生它就该是创造一个理念上的克隆，当然也包括实际上的克隆，就是把那个指针当成一个物理的对象，这叫测量。可是在量子的测量里头呢，它非常神奇的，只要你沿着经典的去做，第一步先建立纠缠，第二步做部分迹，第三步选择其中一个来当成末状态，只要你去做这三步，它的第二步就会使得你的所有的非对角项强行地消失。也就是说那些 1-1 的和-11 的那些状态一概都没有了，只留下那两个对角项，那这是不可理解的地方，因为我们直觉上相信测量是制造了一个克隆，而你看现在已经告诉你，由于有非对角元的存在，实际上量子的测量永远不可能做出克隆。这也是使得所有的问题不可接受的地方，当然我先完成下一步，假设我们已经有对角的状态了，那下一步呢，我们说它就有 平方的可能呢，概率呢，它会出现 up up 态，以 平方概率呢，它出现 down down 态，这个无所谓，这个完全就是跟我们量子力学观测到的是完全符合的，也就是说尽管我们存在刚才说的这个把非对角元消失掉的问题，可是我们实验上是完全能对上的，没有丝毫的问题。而且我们所做的数学计算和经典也是一模一样的，唯一有问题的地方在于它真的不像我们所知道的测量。01：21：16 那这时候你怎么办，有个数学算出来的结果，我们遵循了完全跟你认同的或者说你假设它是对的数学是一模一样的，然后呢当我们作用在量子的对象上的时候，我们一算发现跟你通常理解的那个测量是不一样的，你怎么办。那有的人就说，我希望留下来测量的我认为的这个测量是什么，所以呢我反对你把测量变成一个中间会变成不是克隆的那样的东西，所以它要取消这一步。那怎么才能取消呢，我们说只要用非对角元，这项就存在，对吧。所以，它唯一的办法是退回到经典概率论。而经典概率论可以往回再走一步，再退回一步，它说经典概率论之所以存在呢，是因为你每次总是不知道这个硬币到底怎么翻的，这个详细的信息上帝其实是知道的。也就

是说一旦我能退回经典概率论呢，我总能退回到经典确定性的动力学，这个很好，这个世界对我来说特别漂亮，因为确定性的东西的测量对我来说特别简单，一个车我看到它在那儿，是因为它本来就在那儿，我什么也没干。所以，这有一拨人，他们希望回到经典确定性的世界。那回到它的方法是先取消非对角元，在我的理论体系里头，于是我就成了概率论，而概率论呢，我再往回退一步，我说其实我只要信息足够明确，它就成了确定性的足够多。01：22：48 那就有这么一拨人，他们开始找这么个理论，说我能不能写下来一个理论，这个理论里头非对角元是不存在的，但是我仍然能够解释所有的量子的现象。还有另外一拨人呢，他们只问一个非常现实的问题说，好吧，那对于这个情况的话，你告诉我，遇到什么样的实验情形，我需要去做这个部分迹，因为反正我知道一做这个非对角元就没了，它相干性就没了，只剩下对角的那些项了。我如果能回答这个问题，我的理论本身也是完美的，只是我确实改变了你对什么是测量的理解，但是我的理论本身是完美的，也就是说你给我任何一个场景，我能告诉你呢，你现在要做部分迹了，你做下去，做下去答案就是对的。那非常遗憾的事情呢，就是现在量子力学还没有回答到底什么时候能做部分迹的问题，我前面也提到了，我说我可以换一个答案去替代它，但替代完了，只是能够稍微地更好理解一点，但是它实际上没有意义，替代的方法就是我说一旦你碰到相互作用的对象，就是在你的描述的对象里头，有一个是不支持非对角元的，是一个经典对象的时候，也就是说假设你的经典指针，你明明知道那个指针就是一个硬币做出来的，那这时候不好意思，你就把非对角元给消失了，把 Trace 给做了，那它自然就没有了。第 48 集：量子与经典的边界问题 01：24：15 那现在的问题就蜕化成了另外一个问题，我怎么知道我的实验当中的某个仪器其实跟硬币性质类似，所以呢，它就成了一个什么是量子和经典的边界的问题。千万不要认为这个问题其实特别容易回答，它真的不是特别容易，直观地说你认为，因为量子是描述越来越小的微观世界的，对吧，你说大小是个问题，但是你会发现，其实在星体这个层次，有些现象用量子去描述也很好。有一个实验告诉你，细菌一定程度上展示了量子性，然后 Bucky Ball 就是碳 60 构成的球，那个是肉眼可见的，它的相干性实验做出来，做出来它仍然看到明暗相间的条纹，也就是说这么个肉眼可见的东西，它的量子性还是很强。所以，我们只知道大概的答案，就是它确实只要遇到经典的，请你就回去做 Trace，但是我们不知道哪个东西是经典的。当然我们可以流氓地说，我每次先做两套计算，一套做部分迹，一套不做，做完之后，我说哪个对上了，就告诉你什么时候要

做部分迹了。那现在为止，这个基本上就是这么个状态，每个实验预测其实就是个流氓预测，我说你到这个时候就该做了，反正你就该做了，最后算出来是对的，我蒙对了，这时候该做了。所以，迄今为止，我们仍然有小小的问题留了下来，但是这条路至少比另外一条路要好很多，另外一条路是我要保持我对测量的经典的世界的认识。测量就是这个东西是什么，我看了一眼它还是什么。这个非常好，如果我能保持我当然也愿意，对吧，那我不能保持，那么我们的办法就是去问别的问题，那堆我们管它叫 Die hard，叫做什么来着，就是永远不死的，或者说什么来着，就是心里头永远不想退出历史舞台的，我们管它叫 Die hard fessor（不确定）(01:26:16)。他们的梦想就是找出一个新的数学理论，在这个新的数学理论里头完全没有非对角元，完全用经典确定性理论或者它的简化版本，信息不够版本，也就是经典随机性理论能够解释所有的实验，那其中一个非常具有代表性的人物就是爱因斯坦，他认为上帝是不掷骰子的，他认为月亮在你不看的时候，它还在那儿。01：26：44 按照我们的理论，当然月亮因为它是一个宏观课题，所以按照我们的理论，我们也会说只要你讨论的是月亮呢，你已经做过部分迹了，所以呢，它是符合经典理论描述的。但是，换句话说，我们把月亮替换成一个更一般的，我们不知道该是经典还是量子的东西呢，那么我们坚持的这个视角就是好吧，不看它确实是不在的。因为在你不看它的时候，我确实不知道它是什么状态。当然，这个问题有两重理解，第一重就是在经典的硬币的时候，不看它，我也不知道它的状态是什么。因为如果你允许经典纯随机硬币的存在，在我看那个硬币之前，它其实是向上态和向下态的随机组合，尽管不是矢量相加，可是它是它们的随机概率相加，所以我也不知道它到底什么态。而量子呢，它比这一层还要更加的困难，它说这个东西是我做完那个部分迹之后的解释，而做完部分迹之前那件事情呢，才更加恐怖。因为在我做完部分迹之前，就在我做部分迹的过程当中，我把那个非对角元也消灭了，这两件事情是使得量子力学通常被人误解，或者说很难接受，一件就是非对角元做部分迹的时候消失了。第二个就是就算你得到了经典的纯随机的概率的表达式，你仍然不能给出来那个状态具体是什么，我们只能说是所有的可能状态中的一个。那这是两个需要分开，但是绝大多数的人把它们俩混在一起的理解量子力学的困难。因为第二个困难，实际上你只要允许经典随机硬币的存在，它就有这个困难，也就是说它不是量子本身造成的，它和态的相干性，和非对角元没有任何关系，它是由经典概率论造成的，而第一个困难才是真正的量子力学的困难。01：28：46 也就是说我做一下部分迹，我的非

对角元就消失了，那我凭什么我要做呢，我什么时候来做呢。消失了就意味着我的量子性就没了，只剩下经典性了，那这是一个非常非常大的挑战和困难。就说我做完部分迹之后，得到的不是我之前状态的一个克隆，这是理解量子力学真正的困难所在，而不在于得到概率分布函数之后，对概率分布函数做的经典测量的解释。当然，我再一次强调确实这两个困难都是同时存在的，所以使得理解量子力学更困难，而在理解经典测量的时候，为什么大家避开了第二个困难呢？因为大家说其实啊，那个硬币根本就不是纯随机的，在你看它之前，它真的就已经向上或者向下了，如果你是上帝跟踪所有硬币的运动，在你打开手掌之前，你是完全知道那个硬币的状态的。所以，这也就导致大家在经典随机性上的解释不会带来任何问题，因为你把它看成确定的就完了。01：29：53 所以，我说这一部分的意思只是告诉你说，我没有企图去替代经典的确定性的意思，我只是告诉你说，它是两个不同层面的困难，一个是经典随机性带来的困难，一个是非对角元带来的困难。而前面那个困难要困难得多，困难得多，因为只要有前面的东西的存在，你做部分迹，就不再得到一个克隆，不再得到一个克隆就意味着我测量总好像干了一件什么事。干了一件什么事，就得有一个物理的过程，它是一个带时间的过程，它是一个演化。于是大家就得去问，如果它干了一件什么事，控制这个演化的动力学又是什么，所以它就成了更加难以理解的，更加复杂的问题。

5.6 Die-hard 教授的理论

01：31：00 那在结束这段量子力学理解它最大的困难之前呢，我们稍微地说一下那些 Die-hard professor 他们构造的理论大概是什么样子的。那有一派人呢，他就企图去证明说只要满足你这个要求，就是它没有非对角元，仍然能够描述这个量子现象，那么我只要能满足这个要求呢，我去看看这个理论就能长成什么样。比如说我们说了，我们之前引入一个非对角元里头非常重要的一个实验之一呢，就是那个多个磁场的 Stern-Gerlach 实验，也就是说我先让它经过一个 BZ，摁住往下的，只留往上的，再经过一个 BX，摁住往下的，只留往上的。然后我再让它经过一个 BZ，发现 BZ 里头呢，上下都在，也就是说如果我做个经典类比呢，我先把经典硬币的向下面给盖住，只留向上。接着我把圆形的硬币放走，把方形的硬币盖住，然后严格地按照我刚才说的模型，它应该只剩下向上状态的方形硬币，哦，不对，圆形硬币。但是，当我再去问它到底是向上和向下状态的时候，向下状态它也出来了，

而这个事情在经典的时候，是不可理解的，因为向下状态已经在一开始的时候就被我灭了。然后我问了一个无关的问题，问了一个它到底圆的还是方的问题，它又出来了。然后，我们说这个事实就启发我们说，其实很可能在这个量子现象里头，这个向上态呢，它其实包含着圆和方两个，而圆这个状态呢，它其实也包含着向上和向下两个。所以，这是启发我们用矢量相加来建立量子力学模型的一个重要的实验。01：33：00 好了，现在你不说不想要矢量相加吗，那怎么办呢，那你就得回答，是不是我有一套数学理论可以解释我刚才的实验。那这个实验怎么解释呢，它说第一，我得允许任何一个方向上的向上向下都是一个随机变量。所以呢，它有连续多个，连续的无穷多个随机变量，就说任何一个 方向都是对应着一个随机变量，就是 （k），而这个 （k）（不确定）（01:33:31）等于什么呢，它有的时候等于 1，有的时候等于-1，这是第一个，就是任意一个方向都得是一个随机变量。但这还不够，为什么呢，因为如果是这样的话，任意一个方向都独立的话，我也解释不了我刚才那个实验。因为你看我原来没有，摁两次以后又跑出来了，这肯定跟我中间摁什么是有关的。也就是说我把它改成 BZ、BZ、BZ 呢，这个现象就没有了，它只会有一个输出。我只有改成 BZ、BX 和 BZ 的时候呢，它就会有两个输出，也就是说中间那个 X 和那个 Z 不是独立的，如果我允许任何一个方向上都有一个独立的随机变量，我这个理论也不对，因为只要独立，我这个加了 Z 和加 X 有区别，实验现象有区别这件事情就体现不出来。01：34：23 那怎么办呢，所以它是一个包含了任意方向对应着一个随机变量的理论，并且这些随机变量之间，还是关联在一起的，不是独立的。而且，还有一个重要的事实是什么呢，是说你想如果我测了某个 方向，比如说 方向就是 Z 方向，如果我测了某个 Z 方向之后，它的状态是什么呢，它的状态并不意味着我就是 Z 方向处于这么个状态，也就是说如果我的硬币是红色的，我测了之后，我就知道了它就是红色的。如果我用这套不包含非对角元的理论来解释，你将来就会遇到这么一个神奇的事情，我每次测量之后，我不再是测量完的状态就是我的状态，而是仅仅能保证我测量完了之后，如果你马上进行另外一次测量的话，它得到的答案还是那个相同的答案。这两件事情是不一样的，就是你测完之后，状态就是你测出来的状态和我仅仅保证我那个状态，我能写下来非常复杂，它不是那个你测出来的状态，可是我仍然能够保证如果你再做一次相同的测量的话，它得到的还是同一个答案，这两件事情并不是一件。后面那个状态可以变，但是我只保证你再测一次它还是那个答案，要弱得多，弱得多。01：36：00 好吧，现在就

问你这样的理论你要不要，就是你为了使得你的量子测量更容易解释，不再有那个非对角元被强行消失的一步，你的测量将来变成了这么个德行。说我呢，测完之后，不表示，我看见一个车在那儿，不表示这个车在那儿，我只保证你如果还拿眼睛看一下，那个车它还在那儿，你千万别问我那个车它自己在不在那儿，因为它在任何一个方向都是一个新的随机变量的分布，我绝对告诉不了你，它那个车还在那儿，可是我能保证如果你还在这个方向上再测一次，那么它还是那个状态。你想这样的理论你要不要，那如果是我，我肯定不要，这是一拨人。第 50 集：Bell 不等式及其检验另外一拨人，那更多的信息去看《二态系统上的量子力学》，那另外一拨怎么想的呢，他说这样，我证明一个定理，这个定理呢，只要你把非对角元去掉，以概率论为基础，我就能证明一个不等式，这个不等式小于等于什么东西。然后呢，我将来就去看这个量子的实验出现的结果，我把这个实验测量结果带进去以后呢，这个不等式是不是得到满足，那这一派算的东西叫做 Bell 不等式以及它的实验检验。后来就发现量子的实验结果，基本上挑战了这个不等式。也就是说只要满足这个经典性的理论，没有非对角元的理论，我都小于等于这个，但是我实验做出来，大部分时候是大于等于这个的。那有更加好的，更加精密的实验，在证明这一点。迄今为止，一般认为 Bell 不等式的实验证明已经做完了。但是，这拨 Die hard fessor（01:37:44）非常神奇，他们每次都能找出来说如果你允许我做这么这么个解释的话，其实你那实验还有漏洞，它叫 Loop hole，这个 Loop hole，不断地有人在找，不断地有人去精炼新的实验，告诉你这个 Loop hole，至少你指出来那个我们已经把它干掉了，是不是有一天所有的 Die hard fessor（01:38:06）都能同意这确实就是最终的理论呢，我还不知道。那这两个都是对于非常困难的问题的回答，因为确实一定程度上，测量意味着我就是做了一个克隆，是一个很好很好的图景。然后量子力学破坏了这个非常好的事情，它就做不出来克隆。01：38：43 这其中还有我们自己的工作的贡献，所以参考文献也写在这儿，有兴趣可以去看一下。好，那我们到此为止就把所有的量子力学的内容都学习完了，那和正统的量子力学课程相比，你所欠缺的只有小小的一部分，真的去做一下薛定谔方程的求解，真的去做一下计算，这个如果你有兴趣的话，可以继续去学习别的书和别的课程。但是，我要告诉大家的事情是你对于量子理论的理解，对于为什么需要这么一个神奇的奇怪的量子理论的理解，已经远远超过一般的量子力学课程的学生的理解，甚至大多数老师的理解。

第六章　从本课程学到了什么

6.1　所学内容总结

那我们总结一下，整个我们讲过的东西。第一，我们发现经典概率论写成矢量形式之后，能够描述所有的经典的随机变量的测量。并且，这个数学形式特别简单，就是一个只有对角元素的矩阵。但是这样一个理论，也留下来一个问题，这个问题就是如果真的有个纯随机个体，那个纯随机个体的测量到底怎么理解，因为在我们看一个硬币之前，它真的没有一个向上或向下的状态，它就是向下或者向下的概率叠加，那这个问题是个问题，当然我们说了，传统的理解是把它看作由于信息不足，本来是确定的，那也就没问题了。但是，在我们这里仍然把它当成一个随机状态测量理解上的问题。01：40：48 好，接着我们发现，如果我们允许量子的状态之间有加法，我们就能写下来这样一套带矢量形式的，带非对角元的矩阵形式的量子力学的数学形式，而我们能够用它解释所有我们之前提到的量子现象。反过来，如果我们坚持用没有非对角元素的，就是概率分布或者用牛顿力学，我们是不能解释之前提到的量子现象的。当然，这样一套理论也留下两个问题，一个问题是当我们做测量的时候，我们永远要做一个部分迹，而一做这个部分迹，我们就把非对角元消失了，那把非对角元抹掉以后，我们的测量就产生了一个很不好的理解，它再也不是置备一个克隆了。01：41：45 那第二个呢，就算我们得到了这样一个像经典随机分布的一个密度矩阵，这个密度矩阵的测量的理解也是个问题，当然这个问题就会回到经典随机变量的测量的问题。好，那整个的，量子力学本身的数学，是第一，你的状态是由　描述的，这个　呢，它由于任何一个状态，可能可以写成　加　的左矢和右矢，于是你乘起来就会有非对角项，好，这个就是第一条，你的状态是用密度矩阵　表示的。第二，你的算符是用，就是你的测量的物理量是用算符 A 表示的。第三条，如果你想去测量 A，看看得到的哪个状态的几率以及它们的平均值是

什么，你要算的东西是 TraceA 乘上 。第四条，在你测量完之后，得到一个记录 M，那么这个系统在测量完之后的状态，就是 M 的右矢和左矢，把它放在两边，然后把 放在中间，这算出来的就是它的测量后状态。01：42：57 然后，第四条就是如果你要关心演化的话，这个演化就是你会写下一个哈密顿量，然后把哈密顿量变成一个演化算符，放在 的左边和右边，这个就是你演化之后的状态，T 时刻的状态。说了这一点，反正也不做要求，也不重要。好，那通过所有的这个内容，我们真正想告诉你的东西，在量子力学本身只有这一条，就是量子的现象导致我们真的要引入状态的加法，才能解释。而还要告诉你的内容之外的东西，还有很多，比如说其中一条就是我提过的波尔说的，如果你没有被量子理论痛苦过，那么你真的从来就没有明白过量子理论。你只有发现这样一套理论，它为什么一定要长成这样，是受什么样的实验的启发，然后再回过头来发现，长成这样的理论跟我以前所理解的这个世界该长成什么样，有没有什么冲突的地方，这才是真的想明白了量子力学是什么。当然，这个想明白是有局限的，不是真的完全想明白了，而是想明白了到底在什么地方，我可以暂时不明白，我可以接受这个问题的存在。那至于这个问题，后续到底怎么解决，那是另外的事情。

6.2 我所期待的你的收获

01：44：30 我说过了有一部分人认为这就是量子力学，有一部分人非得找一个其他形式的量子力学，这是一个后续的事情。但是，至少我知道了，哪里我是真明白，哪里我是可以暂时不明白，什么地方是我痛苦的原因。而且我明白了什么是科学，科学就是真的是要写下一个数学理论，使得我算出来的所有结果和实验是一样的，至于我先写下来的理论是不是我的人类的脑袋本身可以理解的，这个理解超越了纯粹的计算，是某种我认为我觉得爽的，我觉得可以接受的，我觉得跟我对现实理解的那个日常生活的习惯是一致的，那完全不是我们物理学家关心的问题。我们只关心这个实验事实长什么样，你的数学模型长什么样，你的数学模型的哪一步是描述这个实验当中的哪一部分的。算出来的最终结果怎么样，这个实验做完的最终结果是不是跟你的理论预测算出来的一样，仅此而已。01：46：08 除了认识世界的收获，什么是科学的收获，以及量子力学本身的收获之外，我们还在前面就提到过关于学习方法的收获。那么这个学习方法，在这里体现为什么呢，就是你一定要知道这样一个学科，它的典型的研究对象，这个典型研究对象上的

那些典型的问题是什么。然后这个学科的研究者，大概是怎么来想的，比如说表现在量子力学上，你一定要搞清楚这个量子的现象到底在什么地方和经典的不一样。然后我们是怎么想的呢，我们想得特别的简单，来呀，写下个数学方程试试，写下个数学描述试试啊。说概率分布函数不行，那就用矢量呗，当然我们受很多时候的启发，对吧，你也很难知道当年那拨提出来这个理论的人到底怎么想的，但是实在不行，那就试啊，直到试出来有一天我们的理论能够跟实验相符为止啊，我们没有别的更多的想法。当然，你说是不是有些人是从某个角度来这么猜的，有些人由于自己的生活的启发，是从另外的角度这么猜的，他的想象力的来源是不同的，那当然是可以的。比如说据说薛定谔他写的时候，就更倾向于写下一个向经典波动方程的角度去写的，那是完全可以的。但是，你说到底有没有一个就是超越所谓的数学和科学的这种，以及数学和现实的这么简单的这个指导原则的想法在后面，比如说使得我们的理论变得跟我们日常的理解一样，使得我们的理论变得大多数人更容易接受，使得我们的理论更加符合某个其他的东西，这些都不是我们真正所关心的。01：48：11 所以这也是为什么，当然我也说过，你就算不懂我的所有的数学，我这门课的第一个任务是让你明白有一些实验是经典的概率论以及经典的牛顿力学不能解释的，那就够了。但是，如果你想超越这个阶段怎么办呢，我只能教你这套数学的语言，教完之后，你才能体会到我们到底是怎么来思考的。也就是说很多时候，我们甚至连保留下来的数学和保留下来的物理概念是什么，也是经过这样一套一轮一轮地跟实验去对比，来最后确定下来的。比如说我没有去展开你会发现，在有的书上会提到轨道这个东西在量子力学是不是要留着的。那为什么有些变量最后发现是离散的之类的等等这种问题，那所有的这些，就是你以前觉得它该怎么样的，你的唯一的标准，就是去看看在新的数学框架里头，只要它能描述这个实验，它是不是还留着。01：49：33 顺便通过这个例子也告诉大家，数学它是描述现实的工具，而且不仅仅如此，数学也是表达我们典型思维方式的工具，也就是说我们很多时候需要把它当成表达我们思考的内容的语言，因为你如果不用形式上完全统一，没有任何歧义的符号来表示，并且是可计算的符号来表示，我们基本上就不能够做任何深入的思考。那还有一个学习方法上需要再一次强调一下的点，叫做体验式的、创造式的学习，也就是说我们学习任何知识的时候，我们真的不是把它当成知识，来学会那个人家已经创造出来的东西，而是学会人家创造这个东西的过程，来体验他们当时的痛苦，来再一次体会他们当时思考这个问题的方式，这是真正你要学的。你

学习人家已经通过这些痛苦和快乐和创造，已经得到的结果，当然也有意义，但是那个意义远远比不上你重新去体验一下人家当时面对的是什么问题，怎么去面对的，解决它的时候，最关键的思考的点在哪，为什么要这么做。因为总有一天，你会遇到一个机会，这个机会需要你自己去把问题提出来，自己去把问题解决，这个问题可能从来没有人给你解决过。01：51：34 而如果你只是学会了知识，学会了面对这个场景，我就可以这么做的这种口诀，这种查表的公式，那么那些独一无二的，从来没有被人解决过的问题，就会离你而去，我们每一个学习者，都是为了提出抓住新的问题去面对这些问题，提出解决方案，而不是去照搬别人已经解决的问题，来解决新的问题，因为那样你只能解决旧的问题。好，那作为量子力学所有都学完之后，我跟大家分享的带回家的消息是你的人生更完整了。那为什么你的人生就更完整了呢，第一，你确实知道了，就是你用你的日常的经验，因为你的日常经验，真的只来自于确定性的经典事件以及随机性的经典事件。你知道了你的日常经验之外的世界，那些不能用确定性的经典世界以及随机性的经典世界所能解释的现象。所以，它给你打开了一扇窗，你再去看世界的时候，你看见的是这个世界真的不一样了。比如说当你下一次再进电影院或者看到有人骑车戴个墨镜的时候，你就会想起来说墨镜这个东西真神奇，它这个偏振片的东西是两片偏振片叠起来，不能让任何光过去，中间斜着插一片是可以过去的，而这个事情呢，是不能用任何经典的现象能理解的。然后，下次当你看到一个照相机镜头是彩色的时候，你也会想起来说，千万不要小看这个彩色，因为它告诉你说，再镀一层膜，它某种光的透过率会增加，而这件事情就跟笑话一样，因为镀越多的膜，在你看来，用经典的世界去看，它只会减少透过光的数量。01：53：52 好，那除了这个，你还知道既然月亮在不看的时候是不在的，或者至少月亮在你不看的时候，它的状态是不知道是什么的。除了量子力学本身，你还学会了或者体验到了一点点什么是数学以及什么是科学，数学和科学的关系，也就是说我们一切的标准都是你的数学写下来之后，算出来的东西是不是可以经过实验的检验，或者说就算我验证完了，我也可能，每一个实验都对，我也原则上没有检验了我的理论，因为我的理论它隐藏着在任何一个现象上它都对，可是我的任何实验检验，它都是有限的实验检验，因此那个叫做可证伪性的概念是科学的重要的标准，也就是说至少迄今为止在我验证过的所有实验里头，我的理论都对，都没错，而我的理论本来就有可能错，只要这个实验不这样，我就会错，那么这样的东西是科学。同时在科学里头，我们也会发现所有的没有经过我的理性检验的

东西，我的理性检验的方法可能是一个数学证明，一个数学计算，一个实验检验。那么所有没有经过这样的理性检验的东西都是有危险的，我觉得它应该成立或者应该怎么样，这个事情真不好说，没准在我认识的世界的边缘，就是我日常生活的时候，我这个假设是可以的，可是如果我把认识世界的边缘打开，你就会发现很多时候，很多新的概念会挑战你这些没有经过理性检验的一些你认为它应该存在的东西。好，这就是我要通过量子力学整个分享给你的东西。什么是量子的现象，什么是量子的理论，量子理论当中最关键的点是什么，什么是科学，科学和数学的关系，数学和思维的关系以及学习方法。那所有的这些材料，我之前提过的小抄以及这份讲稿，都可以在一个叫做吴金闪的书们的网站上下载到，大家可以去看看。

6.3 最后的结束语

本课程到此结束。本课程在内容选择甚至具体内容的展开上都和大多数量子力学的教科书和科普书和视屏不太一样。我们坚持处处体现什么是科学——观察和测量、建模、计算分析、实验检验、系统性梳理和构建出来理论，而抛弃一切轶事故事等可以吸引庸俗读者和学习者的东西。

科学的有趣在于科学本身，在于科学被创造出来的过程，而不在于庸俗的类比和故事轶事。如果你对跟科学有关的类比、故事、轶事更加感兴趣，那也是可以的，去读科学家的传记。那是传记的一种，而不是科普读物的一种。

在具体内容上，贯穿全书的是从各个方面阐述量子的行为和理论和经典的行为和理论的差异，然后我们一起构建了可以描述这个行为差异的数学模型。科学不过就是通过建模型、做计算、做实验的方式来讲讲道理。因此，本课程学习完之后，就算你具体内容都忘了，或者基本没学懂，能够让什么是科学进入你的认知结构，也是成功的。

学习方法上，贯穿本书的是一定要做理解型学习：从具体知识的学习中体会什么是科学，体会学习方法；每一个具体知识的环节都要搞明白这些概念和之前学习过的概念是什么关系，这些概念为什么会被提出来。

谢谢你作为学习者付出的时间和努力，希望你喜欢这个深入思考的具有非凡挑战性的过程。

如果你坚持学完了本课程，那么，恭喜你。祝贺你，你的人生已经不一样了：连学习量子力学这件事情你都不怕了，还会怕其他什么事情吗?

名词索引

人名与常用翻译

插图

举例